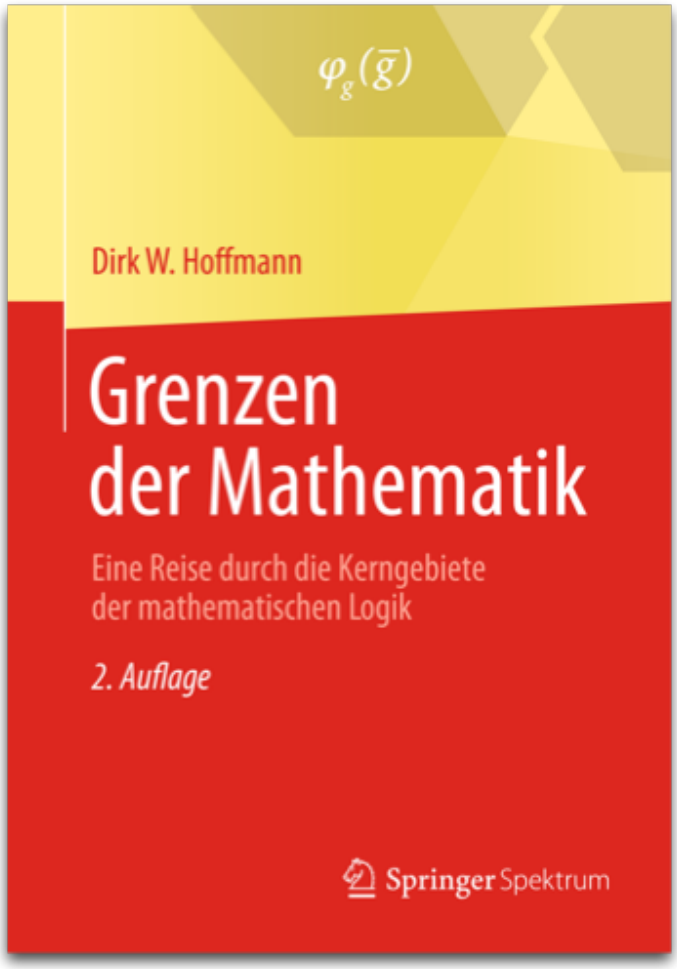
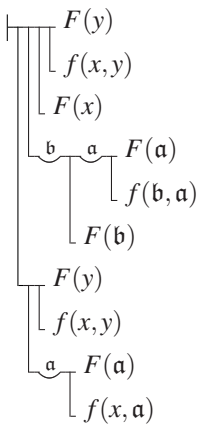
Lösungen zu den Übungsaufgaben



Aufgabe 1.1

Webcode 1292

Die nachstehende Formel stammt aus Freges berühmter Begriffsschrift:



Versuchen Sie, die Formel in die moderne Notation zu übersetzen.

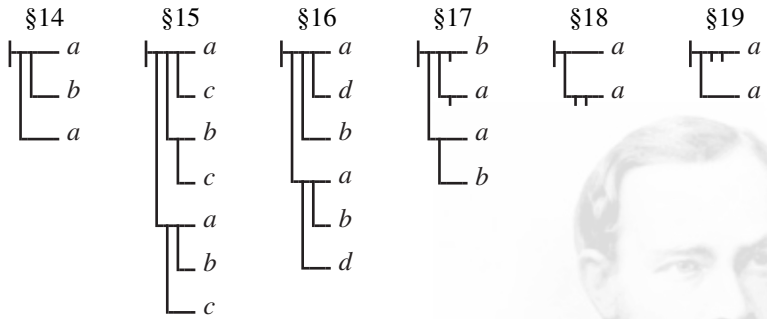
$$(\forall a\,(f(x,a) \to F(a)) \to (f(x,y) \to F(y))) \to$$
$$(\forall b\,(F(b) \to \forall a\,(f(b,a) \to F(a))) \to (F(x) \to (f(x,y) \to F(y))))$$

Aufgabe 1.2

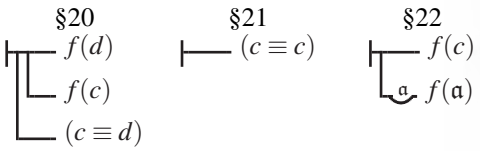
Webcode 1293

Die nachstehend aufgelisteten Axiome stammen aus Freges berühmter Begriffsschrift:

- Aussagenlogische Axiome



- Prädikatenlogische Axiome



Übersetzen Sie die Formeln in die moderne Notation.

§14 : $A \to (B \to A)$

§15 : $(C \to (B \to A)) \to ((C \to B) \to (C \to A))$

§16 : $(D \to (B \to A)) \to (B \to (D \to A))$

§17 : $(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$

§18 : $\neg\neg A \to A$

§19 : $A \to \neg\neg A$

§20 : $c = d \to (F(c) \to F(d))$

§21 : $c = c$

§22 : $\forall x\, F(x) \to F(c)$

Aufgabe 1.3

Webcode 1060

In Abschnitt 1.2.2 haben wir herausgearbeitet, wie Cantor in seiner 1874 publizierten Arbeit die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen bewies. Hierzu ordnete er jeder Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

eine *Höhe* N zu, die sich wie folgt berechnet:

$$N = n - 1 + |a_n| + \ldots + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|$$

War Cantor gezwungen, die Definition in dieser komplizierten Form zu wählen, oder hätte er sie durch eine der nachstehenden, leicht vereinfachten Definitionen ersetzen können?

Vorbemerkung: Damit Cantors Beweis funktioniert, muss Folgendes sichergestellt sein:

1) Es gibt nur endlich viele algebraische Gleichungen der Höhe N.

2) Eine algebraische Gleichung der Höhe N hat maximal N Lösungen.

a) $N = n$

Nein, Bedingung 1) ist nicht erfüllt.

b) $N = |a_n| + \ldots + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Nein, Bedingung 2) ist nicht erfüllt.

c) $N = n + |a_n| + \ldots + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Ja, dieser Ansatz erfüllt sowohl 1) als auch 2), so dass Cantor seinen Beweis auch hiermit hätte durchführen können. Wahrscheinlich hat Cantor hatte die Subtraktion von 1 aus Gründen der mathematischen Ästhetik integriert. Hierdurch wird N zu einer echten oberen Schranke für den Grad des Polynoms. Erreicht wird die Schranke mit dem Polynom x^n, das die folgende Höhe aufweist:

$$N = n - 1 + |a_n| = n - 1 + 1 = n$$

Für den Beweis ist es irrelevant, ob N nur eine obere Schranke oder eine echte obere Schranke für den Grad der algebraischen Gleichung ist. Relevant ist lediglich, dass die Anzahl der Lösungen nicht die Höhe der Gleichung übersteigt.

Aufgabe 1.4

Webcode 1898

In Abschnitt 1.2.1 wurde gezeigt, wie sich die periodische Dezimalzahl $0{,}0\overline{238095}$ in den Bruch $\frac{1}{42}$ überführen lässt.

a) Beweisen Sie auf die gleiche Weise die Beziehung $1 = 0{,}\overline{9}$.

Um die Zahl

$$x = 0{,}\overline{9}$$

in der Form $\frac{p}{q}$ darzustellen, multiplizieren wir beide Seiten mit 10:

$$10x = 9{,}\overline{9}$$

Subtrahieren wir jetzt die erste Gleichung von der zweiten, so verschwindet der periodische Anteil:

$$9x = 9$$

Damit erhalten wir für x das Ergebnis

$$x = \frac{9}{9} = 1$$

b) Hat der Trick, den wir zur Umwandlung verwendet haben, ein gewisses Unbehagen bei Ihnen ausgelöst? Falls ja, dann besitzen Sie bereits ein gutes Gespür für die Gefahren im Umgang mit dem aktual Unendlichen. Versuchen Sie, die Beziehung $1 = 0{,}\overline{9}$ zu beweisen, indem Sie vermeiden, eine unendliche Folge von Nachkommaziffern als ein abgeschlossenes Ganzes zu interpretieren.

Die rationale Zahl, die durch die unendliche Folge $0{,}\overline{9}$ dargestellt wird, ist formal als der Grenzwert der Teilsummen

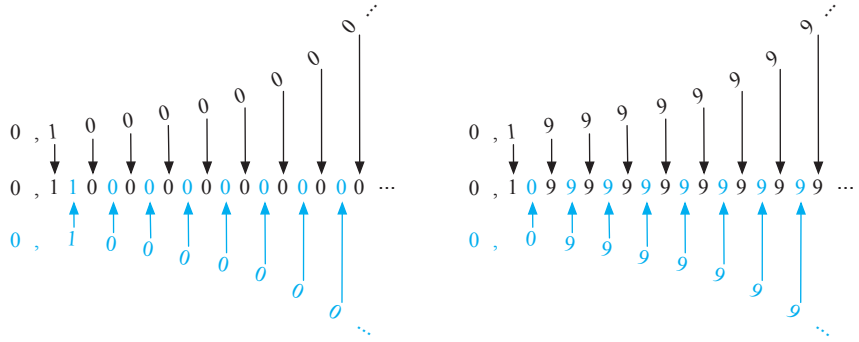
$$\sum_{i=1}^{n} 9 \cdot 10^{-i}$$

definiert. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9 \cdot 10^{-i} = 1$$

Aufgabe 1.5
✍✍✍
Webcode 1001

In Abbildung 1.20 haben wir gezeigt, wie sich zwei reelle Zahlen im Reißverschlussverfahren zu einer einzigen reellen Zahl verschmelzen lassen. Auf diese Weise hatten wir eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ hergestellt und damit die Gleichmächtigkeit beider Mengen bewiesen.



In Wirklichkeit haben wir an dieser Stelle ein wenig geschummelt, da die Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl nicht immer eindeutig ist. Beispielsweise ist $0{,}11 = 0{,}10\overline{9}$.

Das bedeutet, dass die von uns konstruierte Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv und damit erst recht nicht bijektiv ist. Wie könnte man mit diesem Problem umgehen, ohne die Grundidee der Reißverschlusskonstruktion komplett aufzugeben?

Wir haben gezeigt, dass sich die reellen Zahlen bijektiv auf das Intervall $(-1;1)$ abbilden lassen. Mit den gleichen Argument lässt sich zeigen, dass eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $(0;1)$ besteht. Dies nutzen wir zur Vereinfachung dieser Aufgabe aus und nehmen an, dass wir ausschließlich reelle Zahlen x und y mit $0 < x, y < 1$ vor uns haben.

Bevor wir die Ziffernfolgen von x und y jetzt reißverschlussartig verschränken, machen wir das Folgende:

1. Wir eliminieren unendlich lange Nullerketten

   Bezogen auf die abgebildeten Beispielzahlen bedeutet dies:

$$0{,}100000000\ldots \to 0{,}099999999\ldots$$
$$0{,}100000000\ldots \to 0{,}099999999\ldots$$

$$0{,}199999999\ldots \to 0{,}199999999\ldots \quad \text{(nichts zu tun)}$$
$$0{,}099999999\ldots \to 0{,}099999999\ldots \quad \text{(nichts zu tun)}$$

2. Wir bilden Blöcke. Jede Ziffer $\neq 0$ ist ein Block, die Nullen werden anderen Blöcken zugeschlagen

$$0{,}099999999\ldots \to 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots$$
$$0{,}099999999\ldots \to 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots$$

$$0{,}199999999\ldots \to 0,|1|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots$$
$$0{,}099999999\ldots \to 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots$$

3. Jetzt werden die Blöcke reißverschlußartig verschmolzen:

$$\left.\begin{array}{l} 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots \\ 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots \end{array}\right\} \quad 0{,}090999999999\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 0,|1|09|9|9|9|9|9|9|9\ldots \\ 0,|09|9|9|9|9|9|9|9|9\ldots \end{array}\right\} \quad 0{,}109099999999\ldots$$

Auf diese Weise wird eine tatsächlich eine bijektive Abbildung zwischen $(0;1)^2$ und $(0;1)$ hergestellt.

Das geschilderte Problem mit dem Reißverschlussverfahren hat historische Wurzeln. Das erste Mal wurde es in einem Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind diskutiert. Mehr hierzu finden Sie in Herbert Meschkowskis schön geschriebenen Buch *Probleme des Unendlichen*, 1983, Bibliographisches Institut Mannheim.

Aufgabe 1.6

Webcode 1367

Mit der *Goldbach'schen Vermutung* haben Sie eines der wichtigsten bis dato ungelösten Probleme der Zahlentheorie kennen gelernt. In ihrer starken Form lautet sie so:

„Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben."

Zeigen Sie, dass aus der starken Goldbach'schen Vermutung die folgende Aussage folgt:

„Jede ungerade natürliche Zahl $n > 5$ lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben."

Man setze

$$n = (n-3)+3$$

Da n eine ungerade Zahl ist, muss $n-3$ gerade sein. Damit lässt sich $n-3$ nach der starken Goldbach'schen Vermutung in zwei Primzahlen zerlegen und daraus folgt die Behauptung.

Hinweis: In der ersten Auflage war die Aufgabe so formuliert:

Zeigen Sie, dass aus der starken Goldbach'schen Vermutung die folgende Aussage folgt:

„Jede gerade natürliche Zahl $n > 5$ lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben."

Man setze

$$n = (n-2)+2$$

Da n eine gerade Zahl ist, muss $n-2$ ebenfalls gerade sein. Damit lässt sich $n-2$ nach der starken Goldbach'schen Vermutung in zwei Primzahlen zerlegen und daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 1.7

Webcode 1651

In dieser Aufgabe geht es erneut um die Goldbach'sche Vermutung.

a) Nehmen Sie an, die Vermutung sei falsch. Ließe sie sich dann mit den Mitteln der gewöhnlichen Arithmetik widerlegen?

Ja. Wäre sie falsch, so ließe sich ein konkretes Gegenbeispiel erzeugen.

b) Nehmen Sie an, die Goldbach'sche Vermutung sei mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik unbeweisbar. Lässt das Ergebnis in diesem Fall einen Rückschluss auf die Wahrheit oder die Falschheit der Vermutung zu?

Ja. Wäre sie falsch, dann wäre sie widerlegbar. Ist sie unbeweisbar, so muss sie wahr sein.

c) Lässt sich das Ergebnis auf die Vermutung über die Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge übertragen?

Nein. Hier lässt sich die Falschheit nicht durch ein Gegenbeispiel zeigen. Aus der Unbeweisbarkeit können wir daher nicht so einfach auf ihre Falschheit oder Wahrheit schließen.

d) Ist die Fermat'sche Vermutung ein mathematischer Satz vom Goldbach'schen Typ?

Ja. Auch hier wird eine Aussage der Form „*Für alle natürlichen Zahlen gilt . . .* “ gemacht.

Aufgabe 1.8

Webcode 1853

Die *Erdős-Straus-Vermutung* besagt, dass die Gleichung

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

für jede natürliche Zahl $n > 1$ eine Lösung in den natürlichen Zahlen besitzt.

Könnten wir die Vermutung lösen, wenn wir im Besitz eines Entscheidungsverfahrens für diophantische Gleichungen wären?

Für jeden konkreten Wert von n ließe sich die Vermutung entscheiden. Sie lässt sich in

$$4abc = n(bc + ac + ab)$$

und weiter in die folgende diophantische Gleichung umformen:

$$4abc - nbc - nac - nab = 0$$

Aber Vorsicht: Bei diophantische Gleichungen werden die Lösungen zumeist in den ganzen Zahlen gesucht. Hier suchen wir aber nach Lösungen in $\mathbb{N}^+$! Wir können nicht ohne Weiteres davon ausgehen, dass ein Entscheidungsverfahren für die Lösbarkeit in $\mathbb{Z}$ dazu verwendet werden kann, die Erdös'sche Vermutung zu beweisen. In Kapitel 5 werden wir zeigen, dass dies doch funktioniert. Ein Verfahren, das die Lösbarkeit in $\mathbb{Z}$ entscheidet, kann immer auch dazu verwendet werden, um die Lösbarkeit in $\mathbb{N}$ zu entscheiden und umgekehrt. Das Gleiche gilt auch für $\mathbb{N}^+$.

Ergänzen Sie die nachstehenden Aussagen.

Aufgabe 1.9

Webcode 1600

Die Menge ...	leer	endlich	abzählbar	überabzählbar
$\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \subseteq M\}$ ist	○	✔	○	○
$\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert = \lvert\mathbb{N}\rvert\}$ ist	○	○	○	✔
$\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert < \lvert\mathbb{N}\rvert\}$ ist	○	○	✔	○
$\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert > \lvert\mathbb{N}\rvert\}$ ist	✔	✔	○	○

Hinweise:

a) $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \subseteq M\}$

Die Menge ist endlich, aber nicht leer. Sie enthält mit $\mathbb{N}$ genau ein Element.

b) $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert = \lvert\mathbb{N}\rvert\}$

Die Menge ist überabzählbar. Es gibt überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit unendlich vielen Elementen.

c) $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert < \lvert\mathbb{N}\rvert\}$

Die Menge ist abzählbar. Es gibt unendlich viele endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$, die wir aber der Reihe nach aufzählen können.

d) $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \lvert M\rvert > \lvert\mathbb{N}\rvert\}$

Die Potenzmenge ist überabzählbar, sie enthält aber selbst keine überabzählbaren Elemente. Folgerichtig ist die Menge leer und damit erst recht endlich.

Aufgabe 2.1

Webcode 2763

Am Beispiel der Kalküle $E, E_2, \ldots, E_6$ haben wir grundlegende Eigenschaften formaler Systeme herausgearbeitet.

a) Rekapitulieren Sie die Eigenschaften der verschiedenen Systeme, indem Sie die nachstehende Tabelle vervollständigen:

	E	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Widerspruchsfrei	✔	✔	✘	✔	✔	✔
Negationsvollständig	✘	✘	✔	✔	✔	✔
Korrekt	✔	✔	✘	✔	✘	✔
Vollständig	✘	✘	✔	✔	✘	✔

b) Angenommen, das Alphabetzeichen ‚$>$‘ wird nicht mehr als „größer“, sondern als „größer oder gleich“ interpretiert. Ist das System E_4 dann weiterhin widerspruchsfrei, negationsvollständig, korrekt und vollständig?

Die syntaktischen Eigenschaften der Widerspruchsfreiheit und der Negationsvollständigkeit ändern sich nicht, da sie unabhängig davon sind, wie wir die Symbole interpretieren. Der Kalkül ist jetzt aber nicht mehr korrekt, da sich z. B. die Formel $\neg(0 > 0)$ ableiten lässt. Unter der neuen Bedeutung von ‚$>$‘ ist diese Formel aber falsch. Der Kalkül ist auch nicht mehr vollständig, da sich die jetzt wahr gewordene Formel $0 > 0$ nicht aus den Axiomen ableiten lässt.

c) Ist es möglich, die Interpretationen der Symbole ‚$>$‘ und ‚$=$‘ so abzuändern, dass der Kalkül E_3 korrekt wird?

Nein. In E3 lässt sich sowohl $(0 = 0)$ als auch $\neg(0 = 0)$ ableiten. Beide Formeln können niemals gleichzeitig wahr sein. Damit kann keine konsistente Interpretation für die Symbole existieren (kurz: Widersprüchliche Kalküle können niemals korrekt sein).

Aufgabe 2.2

Webcode 2129

Betrachten Sie die nachstehenden fünf Axiome, die eine Reihe von Eigenschaften zweier Klassen K und L festlegen. Sie stammen aus [133] und wurden in ihrer umgangssprachlichen Form belassen:

1. Je zwei beliebige Elemente von K sind in genau einem Element von L enthalten.
2. Kein Element von K ist in mehr als zwei Elementen von L enthalten.
3. Die Elemente von K sind nicht alle in einem einzigen Element von L enthalten.
4. Je zwei beliebige Elemente von L enthalten genau ein Element von K [gemeinsam].
5. Kein Element von L enthält mehr als zwei Elemente von K.

Unter der Verwendung der üblichen mathematischen Schlussregeln lassen sich aus den Axiomen verschiedene Konsequenzen ziehen. Ist es möglich, einen Widerspruch abzuleiten? Wie könnte ein formaler Beweis der Widerspruchsfreiheit gelingen?

Nein, es lässt sich kein Widerspruch ableiten. Um dies einzusehen, verleihen wir L und K eine konkrete Bedeutung:

$$K = \text{Die drei Eckpunkte eines Dreiecks}$$
$$L = \text{Die drei Punktmengen, die die Seiten des Dreiecks bilden}$$

Unter der gewählten Interpretation werden alle Axiome zu wahren Aussagen. Unter der Annahme, dass sich mit den gewöhnlichen Schlussregeln der Mathematik aus wahren Aussagen nur wahre Aussagen ableiten lassen, ist die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems bewiesen.

Aufgabe 2.3

Webcode 2748

In dieser Aufgabe betrachten wir vier Kalküle über einer rudimentären Sprache. Insgesamt lassen sich nur 42 Formeln bilden, die durch das Einsetzen der Terme $\overline{0}, \ldots, \overline{6}$ in die Formeln $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi), \neg\varphi_1(\xi), \neg\varphi_2(\xi)$ und $\neg\varphi_1(\xi)$ entstehen. Die folgende Matrix gibt an, welche der 42 Aussagen wahr und welche falsch sind:

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\varphi_1(\xi)$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$
$\varphi_2(\xi)$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
$\varphi_3(\xi)$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$
$\neg\varphi_1(\xi)$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
$\neg\varphi_2(\xi)$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$
$\neg\varphi_3(\xi)$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$

Die Axiome und die Schlussregeln der vier Kalküle sind nicht bekannt. Dafür sind wir für jeden Kalkül im Besitz einer Matrix, aus der wir ablesen können, welche Formeln aus den Axiomen hergeleitet werden können und welche nicht. Geben Sie für jeden Kalkül an, ob er vollständig, korrekt, widerspruchsfrei oder negationsvollständig ist.

K_1	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\varphi_1(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\varphi_2(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\varphi_3(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_1(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_2(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\neg\varphi_3(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$

Der Kalkül ist vollständig, korrekt, widerspruchsfrei und negationsvollständig.

K_2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\varphi_1(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\varphi_2(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\varphi_3(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_1(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_2(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\neg\varphi_3(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$

Wegen $\nvdash \varphi_2(\overline{4})$ ist der Kalkül nicht mehr vollständig und nicht mehr negationsvollständig.

K_3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\varphi_1(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$
$\varphi_2(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\varphi_3(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_1(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_2(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\neg\varphi_3(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$

Wegen $\vdash \varphi_1(\overline{6})$ ist der Kalkül nicht mehr korrekt und nicht mehr widerspruchsfrei.

K_4	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\varphi_1(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\varphi_2(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\varphi_3(\xi)$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_1(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\neg\varphi_2(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$
$\neg\varphi_3(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$

Wegen $\vdash \varphi_3(\overline{2})$ und $\nvdash \neg\varphi_3(\overline{2})$ ist der Kalkül nicht mehr vollständig und nicht mehr korrekt. Er ist aber immer noch widerspruchsfrei und negationsvollständig.

Aufgabe 2.4

Webcode 2890

Die Kalküle P_1 und P_2 seien durch die folgenden Axiome und Schlussregeln definiert:

Axiome (Kalkül P_1)	Axiome (Kalkül P_2)
(11,110) (A1)	(01,011) (A1')
Schlussregeln (Kalkül P_1)	**Schlussregeln (Kalkül P_2)**
$\frac{(S1)}{(\varphi,\psi)}(\varphi 011, \psi 100)$	$\frac{(S1')}{(\varphi,\psi)}(\varphi 001, \psi 0)$
$\frac{(S2)}{(\varphi,\psi)}(\varphi 11, \psi 110)$	$\frac{(S2')}{(\varphi,\psi)}(\varphi 01, \psi 011)$
$\frac{(S3)}{(\varphi,\psi)}(\varphi 010, \psi 011)$	$\frac{(S3')}{(\varphi,\psi)}(\varphi 01, \psi 101)$
	$\frac{(S4')}{(\varphi,\psi)}(\varphi 10, \psi 001)$

Beide Kalküle arbeiten nach dem gleichen Grundprinzip. Das Axiom gibt ein Paar binärer Zeichenketten vor, und die Schlussregeln bestimmen, wie sich die Zeichenketten sukzessive verlängern lassen. Beide Kalküle unterscheiden sich lediglich in den binären Teilsequenzen, die fest in das Axiom und die Schlussregeln hineincodiert sind.

a) Zu welchem Kalkül gehört der folgende Beweis? Geben Sie rechts für jeden Ableitungsschritt an, welche Schlussregel angewendet wurde.

1. $\vdash$ (01,011) (A1')
2. $\vdash$ (0110,011001) (S4')
3. $\vdash$ (011001,011001101) (S3')
4. $\vdash$ (01100110,011001101001) (S4')
5. $\vdash$ (0110011010,011001101001001) (S4')

b) Lässt sich in den Kalkülen P_1 und P_2 ein Theorem der Form (φ,φ) ableiten?

Innerhalb von K_1 ist ein solches Theorem nicht ableitbar. Um ein Theorem der Form (x,x) zu erhalten, müssen wir mit dem Axiom (11,110) beginnen. Da die linke Zeichenkette kürzer ist als die rechte, muss die rechte Kette das fehlende Zeichen irgendwann wieder aufholen. Dies ist jedoch unmöglich, da die rechte Seite in allen Wortpaaren genauso viele oder mehr Zeichen enthält als die linke.

Innerhalb von K_2 lassen sich die linke und die rechte Seite des Axioms tatsächlich angleichen. Ein Theorem von K_2 ist beispielsweise

(01 10 01 10 10 01 001 01 10 01 10 01 10 10 01 10
10 01 001 10 10 01 001 01 10 001 001 01 10 10 10 01
001 01 001 001 001 01 10 01 10 001 01 001 10 10 01
001 10 001 001 01 10 001 001 01 001 001 01 001 01
001 10 001 001 01,

011 001 101 001 001 011 0 011 001 101 001 101 001 001
101 001 001 011 0 001 001 011 0 101 001 0 0 101 001
001 001 011 0 011 0 0 0 101 001 101 001 0 011 0 001
001 011 0 001 0 0 101 001 0 0 101 0 0 101 0 011 0
001 0 0 101)

Quelle für diese Ableitungssequenz: Uwe Schöning: *„Theoretische Informatik - kurz gefasst“*, Spektrum Akademischer Verlag, 2008

c) Existieren für die Kalküle P_1 und P_2 Entscheidungsverfahren?

Ja! In jedem Schritt wird die abgeleitete Sequenz verlängert. Ist ein Ausdruck (φ, ψ) gegeben und bezeichnet n seine Länge, so muss er in weniger als n Schritten ableitbar sein. Da es nur endlich viele solcher Ableitungen gibt, können diese alle nacheinander analysiert werden und die Ableitbarkeit für jeden vorgelegten Ausdruck in endlicher Zeit entschieden werden.

d) Gibt es ein Verfahren, das für alle Kalküle obigen Typs entscheidet, ob ein Theorem der Form (φ, φ) abgeleitet werden kann?

Nein, dann hätten wir das berühmte Post'sche Korrespondenzproblem gelöst. Es ist eines der bekanntesten unentscheidbaren Problem und spielt eine große Rolle im Bereich der theoretischen Informatik.

Aufgabe 2.5

Webcode 2235

Ergänzen Sie die Wahrheitstafeln der folgenden aussagenlogischen Formeln. Sind die Formeln erfüllbar, allgemeingültig oder unerfüllbar?

- $\varphi_1 = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$ (erfüllbar, nicht allgemeingültig)

A	B	C	$\neg A \vee B$	$\neg B \vee C$	$\neg C \vee A$	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$	φ_1
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

- $\varphi_2 = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (allgemeingültig)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	φ_2
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

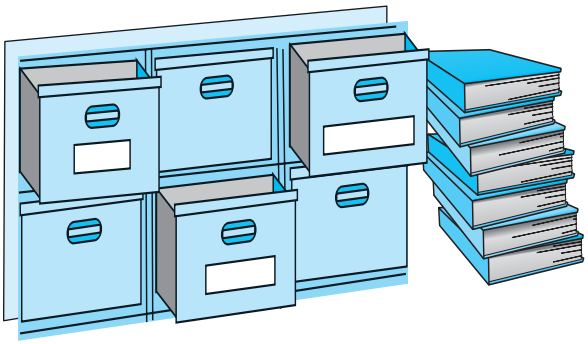
- $\varphi_3 = (A \nleftrightarrow B) \wedge (B \nleftrightarrow C) \wedge (A \nleftrightarrow C)$ (unerfüllbar)

A	B	C	$A \nleftrightarrow B$	$B \nleftrightarrow C$	$A \nleftrightarrow C$	$(A \nleftrightarrow B) \wedge (B \nleftrightarrow C)$	φ_3
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

Aufgabe 2.6

Webcode 2857

Das Dirichlet'sche Schubfachprinzip besagt, dass eine endliche Menge M nicht injektiv auf eine Menge N abgebildet werden kann, wenn N weniger Elemente enthält als M. Das Prinzip ist nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet benannt und ein häufig angewandtes Beweisargument in der diskreten Mathematik. Jedem von uns ist das Schubfachprinzip aus dem Alltag geläufig. Verteilen wir m Gegenstände auf n Schubfächer und gilt $m > n$, so muss mindestens ein Schubfach mehrere Gegenstände enthalten. Im angelsächsischen Raum wird das Dirichlet'sche Schubfachprinzip als *pigeonhole principle* (*Taubenschlagprinzip*) bezeichnet. Auch hier ist die angestellte Überlegung die gleiche: Verteilen sich m Tauben auf n Taubenschläge und gilt $m > n$, so ist mindestens ein Taubenschlag mehrfach besetzt.



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805 – 1859)

Ihre Aufgabe ist es, das Dirichlet'sche Schubfachprinzip für n Gegenstände und $n-1$ Schubfächer zu formalisieren. Führen Sie hierzu für jede mögliche Kombination von Gegenständen und Schubfächern eine aussagenlogische Variable A_{ij} ein, die genau dann den Wert 1 annimmt, wenn sich der i-te Gegenstand im j-ten Schubfach befindet.

1) „Das i-te Element befindet sich in einem der Schubfächer"

$$\bigvee_{j=1}^{n-1} \mathsf{A}_{ij}$$

2) „Jedes Element befindet sich in einem der Schubfächer"

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n-1} \mathsf{A}_{ij}$$

3) „In Schubfach j befinden sich das i-te und k-te Element gleichzeitig"

$$A_{ij} \wedge A_{kj}$$

4) „In Schubfach j befinden sich mindestens zwei Elemente“

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} \bigvee_{k=i+1}^{n} (\mathsf{A}_{ij} \wedge \mathsf{A}_{kj})$$

5) „In einem Schubfach befinden sich mindestens zwei Elemente“

$$\bigvee_{j=1}^{n-1} \bigvee_{i=1}^{n-1} \bigvee_{k=i+1}^{n} (\mathsf{A}_{ij} \wedge \mathsf{A}_{kj})$$

Verbinden wir die Formeln mit dem Implikationsoperator, so erhalten wir die Aussage des Schubfachprinzips: Befinden sich n Elemente in $n-1$ Schubfächern, so enthält eines der Schubfächer mindestens zwei Elemente:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n-1} \mathsf{A}_{ij} \rightarrow \bigvee_{j=1}^{n-1} \bigvee_{i=1}^{n-1} \bigvee_{k=i+1}^{n} (\mathsf{A}_{ij} \wedge \mathsf{A}_{kj})$$

Aufgabe 2.7

Webcode 2956

Die aussagenlogischen Quantoren ‚$\forall$' und ‚$\exists$' seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \forall x\, \varphi &:= \varphi[x \leftarrow 0] \wedge \varphi[x \leftarrow 1] \\ \exists x\, \varphi &:= \varphi[x \leftarrow 0] \vee \varphi[x \leftarrow 1] \end{aligned}$$

a) Worin unterscheiden sich diese Quantoren von jenen, die in der Prädikatenlogik verwendet werden?

In der Prädikatenlogik quantifizieren ‚$\forall$' und ‚$\exists$' Individuenobjekte, d. h. Elemente des Grundbereichs. In der PL0 existieren keine Individuenelemente, und aussagenlogische Variablen sind nichts anderes als 0-stellige Prädikate. Kurzum: SDie aussagenlogischen Quantoren über (0-stellige) Prädikate und die prädikatenlogische Quantoren über Individuenelemente quantifizieren.

b) Es sei φ eine PL0-Formel, in der x die einzige Variable ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$$\begin{aligned} \exists x\, \varphi \equiv 1 &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist erfüllbar} & \forall x\, \varphi \equiv 1 &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist allgemeingültig} \\ \neg\exists x\, \varphi \equiv 1 &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist unerfüllbar} & \neg\forall x\, \varphi \equiv 1 &\Leftrightarrow \varphi \text{ ist unerfüllbar} \end{aligned}$$

Alle Aussagen bis auf die letzte sind richtig.

c) Welche der folgenden Äquivalenzen sind richtig und welche sind falsch?

$$\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi$$

Die Aussage ist richtig:

$$\begin{aligned} \forall x\, (\varphi \wedge \psi) &\equiv (\varphi \wedge \psi)[x \leftarrow 0] \wedge (\varphi \wedge \psi)[x \leftarrow 1] \\ &\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \psi[x \leftarrow 0]) \wedge (\varphi[x \leftarrow 1] \wedge \psi[x \leftarrow 1]) \\ &\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \varphi[x \leftarrow 1]) \wedge (\psi[x \leftarrow 0] \wedge \psi[x \leftarrow 1]) \\ &\equiv \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi \end{aligned}$$

$$\forall x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$$

Die Aussage ist falsch:

$$\begin{aligned} \forall x\, (\varphi \vee \psi) &\equiv (\varphi \vee \psi)[x \leftarrow 0] \wedge (\varphi \vee \psi)[x \leftarrow 1] \\ &\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \vee \psi[x \leftarrow 0]) \wedge (\varphi[x \leftarrow 1] \vee \psi[x \leftarrow 1]) \\ &\not\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \varphi[x \leftarrow 1]) \vee (\psi[x \leftarrow 0] \wedge \psi[x \leftarrow 1]) \\ &\equiv \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi \end{aligned}$$

$$\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \exists x\,\varphi \wedge \exists x\,\psi$$

Die Aussage ist falsch:

$$\begin{aligned}
\exists x\,(\varphi \wedge \psi) &\equiv (\varphi \wedge \psi)[x \leftarrow 0] \vee (\varphi \wedge \psi)[x \leftarrow 1] \\
&\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \psi[x \leftarrow 0]) \vee (\varphi[x \leftarrow 1] \wedge \psi[x \leftarrow 1]) \\
&\not\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \vee \varphi[x \leftarrow 1]) \wedge (\psi[x \leftarrow 0] \vee \psi[x \leftarrow 1]) \\
&\equiv \exists x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi
\end{aligned}$$

$$\exists x\,(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi$$

Die Aussage ist wahr:

$$\begin{aligned}
\exists x\,(\varphi \vee \psi) &\equiv (\varphi \vee \psi)[x \leftarrow 0] \vee (\varphi \vee \psi)[x \leftarrow 1] \\
&\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \vee \psi[x \leftarrow 0]) \vee (\varphi[x \leftarrow 1] \vee \psi[x \leftarrow 1]) \\
&\equiv (\varphi[x \leftarrow 0] \vee \varphi[x \leftarrow 1]) \vee (\psi[x \leftarrow 0] \vee \psi[x \leftarrow 1]) \\
&\equiv \exists x\,\varphi \vee \forall x\,\psi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.8

Webcode 2034

In einer Klausur habe ich vor geraumer Zeit die folgende Frage gestellt:

Aufgabe: *Es sei φ eine aussagenlogische Formel, in der die Variable x vorkommt. Andere Variablen kommen in φ nicht vor. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: „φ ist entweder zu der Formel x äquivalent oder zu der Formel $\neg x$“*

Gleich mehrere Studenten haben die Aufgabe in etwa so gelöst:

> Die Aussage ist richtig. Beweis: Es gilt die Beziehung
>
> $$\varphi \text{ ist äquivalent zu } x \text{ oder äquivalent zu } \neg x \;\Leftrightarrow\; (\varphi \leftrightarrow x) \vee (\varphi \leftrightarrow \neg x) \equiv 1$$
>
> Die Beziehung lässt sich durch elementare Umformungen beweisen:
>
> $$\begin{aligned}(\varphi \leftrightarrow x) \vee (\varphi \leftrightarrow \neg x) &\equiv \neg\varphi\neg x \vee \varphi x \vee \neg\varphi x \vee \varphi\neg x \\ &\equiv \varphi(x \vee \neg x) \vee \neg\varphi(x \vee \neg x) \\ &\equiv \varphi \vee \neg\varphi \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

Die Studenten haben übersehen, dass beispielsweise mit $\varphi = x \vee \neg x$ eine Formel existiert, die weder zu x noch zu $\neg x$ äquivalent ist. An welcher Stelle haben sie in ihrem Beweis einen Fehler gemacht?

Die aufgestellte Beziehung

$$\varphi \text{ ist äquivalent zu } x \text{ oder äquivalent zu } \neg x \;\Leftrightarrow\; (\varphi \leftrightarrow x) \vee (\varphi \leftrightarrow \neg x) \equiv 1$$

ist falsch. Dies wird deutlich, wenn wir Schritt für Schritt vorgehen. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\varphi \text{ ist äquivalent zu } x &\;\Leftrightarrow\; \varphi \leftrightarrow x \equiv 1 \\ \varphi \text{ ist äquivalent zu } \neg x &\;\Leftrightarrow\; \varphi \leftrightarrow \neg x \equiv 1\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann

$$\varphi \text{ ist äquivalent zu } x \text{ oder äquivalent zu } \neg x \;\Leftrightarrow\; \varphi \leftrightarrow x \equiv 1 \text{ oder } \varphi \leftrightarrow \neg x \equiv 1$$

und dies ist äquivalent zu

$$\varphi \text{ ist äquivalent zu } x \text{ oder äquivalent zu } \neg x \;\Leftrightarrow\; (\forall x\,(\varphi \leftrightarrow x) \vee \forall x\,(\varphi \leftrightarrow \neg x)) \equiv 1$$

Hierin sind ‚$\forall$‘ und ‚$\exists$‘ die aussagenlogischen Quantoren aus der vorherigen Aufgabe.

Die Studenten haben dagegen den folgenden Zusammenhang aufgestellt, der zu der hergeleiteten Formel nicht äquivalent ist:

$$\varphi \text{ ist äquivalent zu } x \text{ oder äquivalent zu } \neg x \;\Leftrightarrow\; \forall x\,((\varphi \leftrightarrow x) \vee (\varphi \leftrightarrow \neg x)) \equiv 1$$

Aufgabe 2.9

Webcode 2865

Russell und Whitehead haben den aussagenlogischen Kalkül der *Principia Mathematica* auf den folgenden fünf Axiomen aufgebaut:

PRINCIPIA MATHEMATICA

1. $\varphi \vee \varphi \to \varphi$ (Taut)
2. $\psi \to \varphi \vee \psi$ (Add)
3. $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$ (Perm)
4. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (Assoc)
5. $(\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \varphi \vee \chi)$ (Sum)

Hilberts Schüler Paul Bernays hat gezeigt, dass die aussagenlogischen Axiome der *Principia* nicht unabhängig voneinander sind und das vierte Axiom (Assoc) aus den anderen formal hergeleitet werden kann.

Die folgende Ableitungssequenz ist eine Adaption des Originalbeweises aus der 1926 erschienenen Arbeit *Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der Principia Mathematica* [10]. In dieser Publikation hat Paul Bernays die Ergebnisse seiner Habilitationsschrift aus dem Jahr 1918 zusammengefasst.

1. $\vdash \chi \to \varphi \vee \chi$ (Add)
2. $\vdash (\chi \to \varphi \vee \chi) \to (\psi \vee \chi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi))$ (Sum)
3. $\vdash \psi \vee \chi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (MP, 1,2)
4. $\vdash (\psi \vee \chi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)) \to (\varphi \vee (\psi \vee \chi) \to \varphi \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi)))$ (Sum)
5. $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \to \varphi \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi))$ (MP, 3,4)
6. $\vdash \varphi \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \to (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee \varphi$ (Perm)
7. $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \to (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee \varphi$ (MB, 5,6)
8. $\vdash \varphi \to \chi \vee \varphi$ (Add)
9. $\vdash \chi \vee \varphi \to \varphi \vee \chi$ (Perm)
10. $\vdash \varphi \to \varphi \vee \chi$ (MB, 8,9)
11. $\vdash \varphi \vee \chi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (Add)
12. $\vdash \varphi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (MB, 10,11)
13. $\vdash (\varphi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)) \to ((\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee \varphi \to (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi)))$ (Sum)
14. $\vdash (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee \varphi \to (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi))$ (MP, 12,13)
15. $\vdash (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (Taut)
16. $\vdash (\psi \vee (\varphi \vee \chi)) \vee \varphi \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (MB, 14,15)
17. $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \to \psi \vee (\varphi \vee \chi)$ (MB, 7,16)

Versuchen Sie, den Beweis, der hier nur in Fragmenten abgedruckt ist, vollständig zu rekonstruieren.

Aufgabe 2.10

Webcode 2123

In Abschnitt 2.3.1 haben wir gezeigt, dass sich jede aussagenlogische Formel so umschreiben lässt, dass ausschließlich die Operatoren ‚$\neg$‘ und ‚$\rightarrow$‘ darin vorkommen. Wir sagen, die Menge $\{\neg, \rightarrow\}$ ist ein *vollständiges Operatorensystem*.

In dieser Aufgabe betrachten wir die binären Operatoren ‚$\overline{\wedge}$‘ (nand) und ‚$\overline{\vee}$‘ (nor) mit

$$I \models (\varphi \,\overline{\wedge}\, \psi) \;:\Leftrightarrow\; I \not\models \varphi \text{ oder } I \not\models \psi$$
$$I \models (\varphi \,\overline{\vee}\, \psi) \;:\Leftrightarrow\; I \not\models \varphi \text{ und } I \not\models \psi$$

a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\{\,\overline{\wedge}\,\}$ und $\{\,\overline{\vee}\,\}$ vollständige Operatorensysteme sind.

Wir zeigen, dass sich ‚$\neg$‘ und ‚$\rightarrow$‘ auf ‚$\overline{\wedge}$‘ und ‚$\overline{\vee}$‘ reduzieren lassen:

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv A \,\overline{\wedge}\, A \\ A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv A \,\overline{\wedge}\, (B \,\overline{\wedge}\, B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv A \,\overline{\vee}\, A \\ A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \equiv \neg((A \,\overline{\vee}\, A) \,\overline{\vee}\, B) \equiv ((A \,\overline{\vee}\, A) \,\overline{\vee}\, B) \,\overline{\vee}\, ((A \,\overline{\vee}\, A) \,\overline{\vee}\, B) \end{aligned}$$

b) Weisen Sie nach, dass ‚$\overline{\wedge}$‘ und ‚$\overline{\vee}$‘ die beiden einzigen binären Operatoren sind, die alleine ein vollständiges Operatorensystem bilden.

Sei $\{\oplus\}$ ein vollständiges Operatorensystem. Wir zeigen $\oplus = \overline{\wedge}$ oder $\oplus = \overline{\vee}$.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass $1 \oplus 1$ nicht äquivalent zu 1 sein kann. Andernfalls wäre ein Ausdruck immer äquivalent zu 1, wenn wir alle Variablen mit dem Wert 1 belegen. Es gilt also $1 \oplus 1 \equiv 0$. Mit dem gleichen Argument können wir uns von der Beziehung $0 \oplus 0 \equiv 1$ überzeugen. Die Wahrheitstabelle von $A \oplus B$ muss also zwingend so aussehen:

A	B	$A \oplus B$
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	0

Damit bleiben nur 4 Möglichkeiten übrig.

1. Fall

A	B	$A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Dann ist $\oplus = \overline{\vee}$.

2. Fall

A	B	$A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Dann ist $A \oplus B \equiv \neg B$. Damit wäre auch $\{\neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem, was es offensichtlich nicht ist.

3. Fall

A	B	$A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Dann ist $A \oplus B \equiv \neg A$. Damit wäre auch $\{\neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem, was es offensichtlich nicht ist.

4. Fall

A	B	$A \oplus B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dann ist $\oplus = \overline{\wedge}$.

Aufgabe 2.11

Webcode 2881

Beweisen Sie die nachstehenden Formeln im aussagenlogischen Kalkül:

a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

1. $\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ (Satz 2.4)
2. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (DT)
3. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} \vdash \chi$ (DT)
4. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi\} \vdash \varphi \to \chi$ (DT)
5. $\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ (DT)
6. $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ (DT)

b) $\varphi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$

1. $\vdash \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$ (T7)
2. $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$ (DT)
3. $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (T5)
4. $\{\psi\} \vdash \neg\neg\psi$ (DT)
5. $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$ (MP, 2,4)
6. $\{\varphi\} \vdash \psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$ (DT)
7. $\vdash \varphi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$ (DT)

Aufgabe 2.12

Webcode 2698

In Abschnitt 2.5 haben Sie die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit kennen gelernt. Ist es in dieser Logik möglich, Formeln mit den nachstehenden Eigenschaften zu konstruieren?

$$(U,I) \models \varphi_{\geq n} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ besitzt mindestens } n \text{ Elemente}$$

$$\exists \mathsf{x}_1 \ldots \exists \mathsf{x}_n \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \mathsf{x}_i \neq \mathsf{x}_j$$

$$(U,I) \models \varphi_{\leq n} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ besitzt höchstens } n \text{ Elemente}$$

$$\exists \mathsf{x}_1 \ldots \exists \mathsf{x}_n \, \forall \mathsf{y} \bigvee_{i=1}^{n} \mathsf{y} = \mathsf{x}_i$$

$$(U,I) \models \varphi_{=n} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ besitzt genau } n \text{ Elemente}$$

$$\exists \mathsf{x}_1 \ldots \exists \mathsf{x}_n \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \mathsf{x}_i \neq \mathsf{x}_j \wedge \exists \mathsf{x}_1 \ldots \exists \mathsf{x}_n \, \forall \mathsf{y} \bigvee_{i=1}^{n} \mathsf{y} = \mathsf{x}_i$$

Aufgabe 2.13

Webcode 2042

Eine Relation R heißt

- *reflexiv*, wenn $R(x,x)$ für alle x gilt,
- *linkskomparativ*, wenn aus $R(x,y)$ und $R(x,z)$ immer $R(y,z)$ folgt,
- *symmetrisch*, wenn aus $R(x,y)$ immer $R(y,x)$ folgt.

Formalisieren Sie die Aussage *„Jede reflexive, linkskomparative Relation ist symmetrisch“* in der Prädikatenlogik erster Stufe. Versuchen Sie anschließend, die Aussage im prädikatenlogischen Kalkül zu verifizieren. Um die Aufgabe nicht unnötig zu erschweren, dürfen Sie alle aussagenlogischen Tautologien als bereits bewiesen ansehen.

Formalisierung:

$$\mathsf{R(x,x)} \to ((\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}) \to (\mathsf{R(x,y)} \to \mathsf{R(y,x)}))$$

Im Beweis benutzen wir Instanzen der folgenden beiden aussagenlogischen Tautologien:

$$\varphi \to (\psi \to \varphi \land \psi) \qquad \text{(TAUT 1)}$$

$$((\varphi \land \psi \to \chi) \land \psi) \to (\varphi \to \chi) \qquad \text{(TAUT 2)}$$

Es sei $M := \{\mathsf{R(x,x)}, \mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}\}$

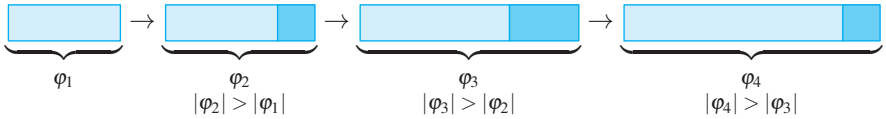
1. $M \vdash \mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}$ (Satz 2.4)
2. $M \vdash \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)})$ (G, 1)
3. $\vdash \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}) \to (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)})$ (A4)
4. $M \vdash \mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}$ (MP, 2,3)
5. $\vdash (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}) \to$
   $(\mathsf{R(x,x)} \to (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}) \land \mathsf{R(x,x)})$ (TAUT 1)
6. $M \vdash \mathsf{R(x,x)} \to (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}) \land \mathsf{R(x,x)}$ (MP, 4,5)
7. $M \vdash \mathsf{R(x,x)}$ (Satz 2.4)
8. $M \vdash (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}) \land \mathsf{R(x,x)}$ (MP, 6,7)
9. $\vdash ((\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,x)} \to \mathsf{R(y,x)}) \land \mathsf{R(x,x)}) \to (\mathsf{R(x,y)} \to \mathsf{R(y,x)})$ (TAUT 2)
10. $M \vdash \mathsf{R(x,y)} \to \mathsf{R(y,x)}$ (MP, 8,9)
11. $\mathsf{R(x,x)} \vdash (\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}) \to (\mathsf{R(x,y)} \to \mathsf{R(y,x)})$ (DT)
12. $\vdash \mathsf{R(x,x)} \to ((\mathsf{R(x,y)} \land \mathsf{R(x,z)} \to \mathsf{R(y,z)}) \to (\mathsf{R(x,y)} \to \mathsf{R(y,x)}))$ (DT)

Quelle:
Menzel, Schmitt: *Skript zur Vorlesung Formale Systeme*, WS 94/95, Universität Karlsruhe.

Aufgabe 2.14

Webcode 2128

Nehmen Sie an, die Schlussregeln eines formalen Systems seien so beschaffen, dass die erzeugten Theoreme in jedem Schritt länger werden, d. h., die Konklusion stets aus mehr Zeichen besteht als die Prämissen.



Existiert für ein solches System immer ein Entscheidungsverfahren?

Ja. Da die Theoreme in jedem Ableitungsschritt länger werden, kann die Ableitung eines Theorems der Länge n maximal n Schritte benötigen. Um festzustellen, ob eine Formel ein Theorem ist, müssen wir lediglich dessen Länge l bestimmen und anschließend alle Ableitungen untersuchen, die aus maximal l Schritten bestehen. Die Anzahl der Ableitungen ist endlich, so dass das Verfahren immer terminiert.

Aufgabe 2.15

Webcode 2952

In Abschnitt 2.6 haben wir erarbeitet, wie sich der Begriff der Endlichkeit innerhalb der Prädikatenlogik *zweiter Stufe* definieren lässt. Im Kern stand die Idee, mithilfe einer Formel zu behaupten, jede injektive Funktion sei surjektiv. Hätten wir den Begriff auch über die Forderung definieren können, dass jede surjektive Funktion auch injektiv ist?

Ja. Für jede endliche Menge M gilt, dass jede surjektive Funktion $f : M \to M$ auch injektiv sein muss. Ist M unendlich, dann gibt es surjektive Funktionen $f : M \to M$, die nicht injektiv sind. Eine solche Funktion ist z. B.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

mit

$$f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$$

Aufgabe 2.16

Webcode 2999

Welche Begriffe werden durch die nachstehenden Formeln definiert?

a) $\forall \mathbf{f}\,(\forall x\,\exists y\,(x \doteq \mathbf{f}(y)) \rightarrow \forall x\,\forall y\,(\mathbf{f}(x) \doteq \mathbf{f}(y) \rightarrow x \doteq y))$

Die Formel besagt, dass jede surjektive Funktion auch injektiv ist. Damit definiert sie den Begriff *„endlich“*.

b) $\exists \mathbf{R}\,(\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z) \rightarrow \mathbf{R}(x,z)) \wedge \forall x\,(\neg \mathbf{R}(x,x) \wedge \exists y\,\mathbf{R}(x,y)))$

Die Formel besagt, dass eine transitive Relation existiert, in der jedes Element zu einem anderen in Relation steht, aber niemals zu sich selbst.

Eine solche Relation existiert genau dann, wenn die Individuenmenge unendlich ist. Die Formel definiert den Begriff *„unendlich“*.

Aufgabe 3.1

Webcode 3667

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen innerhalb der Peano-Arithmetik:

a) *„Es gibt natürliche Zahlen x, y mit $x^2 + y^2 = 9$.“*

$\exists \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \mathsf{x} \times \mathsf{x} + \mathsf{y} \times \mathsf{y} = 9$

b) *„$x^3 + y^3 = z^3$ hat keine Lösung in den positiven natürlichen Zahlen.“*

$\neg \exists \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \exists \mathsf{z}\, (\mathsf{x} \neq 0 \wedge \mathsf{y} \neq 0 \wedge \mathsf{z} \neq 0 \wedge \mathsf{x} \times \mathsf{x} \times \mathsf{x} \times \mathsf{x} + \mathsf{y} \times \mathsf{y} \times \mathsf{y} = \mathsf{z} \times \mathsf{z} \times \mathsf{z})$

c) *„x ist eine Zweierpotenz.“*

$\forall \mathsf{y}\, (\mathsf{y} | \mathsf{x} \rightarrow (\mathsf{y} = \overline{1} \vee \exists \mathsf{z}\, \mathsf{y} = \overline{2} \cdot \mathsf{z}))$

Idee: Eine Zahl ist genau dann eine Zweierpotenz, wenn alle ihre Teiler (außer der 1) ein Vielfaches von 2 sind.

Aufgabe 3.2

Webcode 3195

Welche der folgenden Formeln entspricht der Aussage „7 *ist eine Primzahl*“?

Beide

a) $\forall z\,(z \mid \overline{7} \rightarrow (z = \overline{1} \vee z = \overline{7}))$

Eine natürliche Zahl $x > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

b) $\neg\exists\,(y > 1)\,\exists\,(z > 1)\,\overline{7} = y \times z$

Eine natürliche Zahl $x > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nicht als Produkt zweier natürlicher Zahlen größer als 1 dargestellt werden kann.

Welche der folgenden Formeln entspricht der Aussage „x *ist eine Primzahl*“?

Keine

c) $\forall z\,((z \mid x) \rightarrow (z = \overline{1} \vee z = x))$

Nach dieser Formel wäre die Zahl 1 ebenfalls eine Primzahl.

d) $\neg\exists\,(y > 1)\,\exists\,(z > 1)\,x = y \times z$

Auch nach dieser Formel wäre die Zahl 1 eine Primzahl.

Aufgabe 3.3

Webcode 3367

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mithilfe der Peano-Arithmetik:

a) *„Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.“*

$$\forall \mathsf{n}\ ((\mathrm{even}(\mathsf{n}) \wedge \mathrm{greaterTwo}(\mathsf{n})) \rightarrow \exists \mathsf{y}\ \exists \mathsf{z}\ (\mathrm{prime}(\mathsf{y}) \wedge \mathrm{prime}(\mathsf{z}) \wedge \mathsf{n} = \mathsf{y} + \mathsf{z}))\ \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{even}(\mathsf{n}) &:= (\exists \mathsf{z}\ \mathsf{n} = \overline{2} \times \mathsf{z}) \\ \mathrm{greaterTwo}(\mathsf{n}) &:= (\neg \mathsf{n} = 0 \wedge \neg \mathsf{n} = \overline{1} \wedge \neg \mathsf{n} = \overline{2}) \end{aligned}$$

b) *„Für unendlich viele Zahlen n ist sowohl n als auch $n+2$ eine Primzahl.“*

$$\forall \mathsf{x}\ \exists \mathsf{n}\ \exists \mathsf{m}\ (\mathsf{n} > \mathsf{x} \wedge \mathsf{m} = \mathsf{n} + \overline{2} \wedge \mathrm{prime}(\mathsf{n}) \wedge \mathrm{prime}(\mathsf{m}))$$

Beide Aussagen sind alte Bekannte aus Kapitel 1. Die erste ist die berühmte Goldbach'sche Vermutung, die zweite die Vermutung über die Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge.

Aufgabe 3.4

Webcode 3734

In manchen Büchern wird das Induktionsaxiom

$$\varphi(0) \to (\forall \mathsf{x}\, (\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))) \to \forall \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x}))$$

in der geringfügig abweichenden Form

$$(\varphi(0) \land \forall \mathsf{x}\, (\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x})))) \to \forall \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x})$$

eingeführt. Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind.

Es sei

$$\begin{aligned} \varphi &:= \varphi(0) \\ \psi &:= \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(s(x))) \\ \chi &:= \forall x\, \varphi(x) \end{aligned}$$

Die erste Variante lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & \varphi \to (\psi \to \chi) \\ \equiv\ & \varphi \to (\neg\psi \lor \chi) \\ \equiv\ & \neg\varphi \lor \neg\psi \lor \chi \end{aligned}$$

Für die zweite Variante erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} & (\varphi \land \psi) \to \chi \\ \equiv\ & \neg(\varphi \land \psi) \lor \chi \\ \equiv\ & \neg\varphi \lor \neg\psi \lor \chi \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

Webcode 3212

An erster Stelle der ZF-Axiomenliste haben wir das Axiom der Bestimmtheit eingeführt. In formaler Schreibweise lautete es wie folgt:

$$\forall x \, \forall y \, (x = y \leftrightarrow \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

Nehmen Sie an, wir würden das Gleichheitszeichen aus der Sprache entfernen und das Bestimmtheitsaxiom nicht als *Axiom* sondern als *Definition des Gleichheitszeichens* auffassen. Dies bedeutet, dass wir das Gleichheitszeichen nicht mehr länger als natives Sprachelement, sondern nur noch als syntaktische Abkürzung behandeln dürfen. Können wir in der so modifizierten Mengenlehre immer noch die gleichen Theoreme ableiten?

Ja. Das Bestimmtheitsaxiom führt die Gleichheitsrelation vollständig auf die Elementrelation zurück. Das Symbol '$=$' als syntaktische Abkürzung zu behandeln, ändert also nichts an der Ausdrucksfähigkeit der Mengenlehre. Dass die Gleichheit in der Regel trotzdem fest in die Sprache integriert wird, hat hauptsächlich historische Gründe. In der ursprünglichen Zermelo-Mengenlehre war das Bestimmtheitsaxiom eben ein Axiom und keine Definition. Manche Bücher gehen auch den „moderneren" Weg und nehmen das Gleichheitssymbol aus der Sprache heraus (z. B. Mendelson: *Introduction to mathematical logic*). Hier ist das Bestimmtheitsaxiom in der Tat eine Definition und kein Axiom.

Aufgabe 3.6

Webcode 3700

An vierter Stelle der ZF-Axiomenliste haben wir das Axiom der Vereinigung eingeführt:

$$\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{z} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \exists (\mathsf{w} \in \mathsf{x})\, \mathsf{z} \in \mathsf{w})$$

Unter anderem garantiert es uns, dass für zwei Mengen x und y die Vereinigungsmenge $x \cup y$ existiert. Im Zusammenhang mit diesem Axiom haben wir auch die Schreibweise $x \cap y$ als syntaktische Abkürzung für die Schnittmenge eingeführt. Ist die Existenz der Schnittmenge ebenfalls durch das Vereinigungsaxiom abgesichert? Falls nein, welche Axiome werden hierzu benötigt?

Um die Existenz der Schnittmenge zu beweisen, brauchen wir das Vereinigungsaxiom gar nicht. Die Existenz folgt unmittelbar aus dem Aussonderungsaxiom. Dieses garantiert uns, dass

$$\{z \in x \mid z \in x \wedge z \in y\}$$

eine Menge ist. Diese ist aber genau der Schnitt $x \cap y$.

Aufgabe 3.7

Webcode 3866

Ein unentbehrlicher Bestandteil der ZF-Mengenlehre ist das Fundierungsaxiom. Es besagt, dass wir in jeder nichtleeren Menge x ein Element y finden können, das mit x keine Elemente gemeinsam hat.

a) Welche Bedeutung besitzt das Axiom für die ZF-Mengenlehre?

Das Fundierungsaxiom ersetzt das ursprünglich von Fraenkel eingeführte *Beschränktheitsaxiom*, das den Bereich der Mengen auf den geringsten Bereich eingrenzt, der mit den übrigen Axiomen verträglich ist. Eine direkte Folge des Fundierungsaxioms ist, dass keine unendlich absteigenden $\in$-Ketten existieren können und keine Selbst- oder Ringinklusion möglich ist. Das Fundierungsaxiom wird benötigt, um beispielsweise die $\in$-Induktion zu legitimieren, die eine gebräuchliche Beweismethode der Mengenlehre ist. Mit ihr können wir eine Aussage über Mengen beweisen, indem wir die Gültigkeit der Aussage für alle Elemente einer Menge x annehmen und anschließend zeigen, dass die Aussage dann auch für x gültig ist.

b) Ist das Fundierungsaxiom mit der Russell'schen Typentheorie verträglich?

Ja, es ist dort immer erfüllt! Man wähle aus x das Element mit dem geringsten Typ. Dieses kann nur Elemente enthalten, deren Typ geringer ist. Diese Elemente können nicht in x vorkommen.

Aufgabe 3.8

Webcode 3115

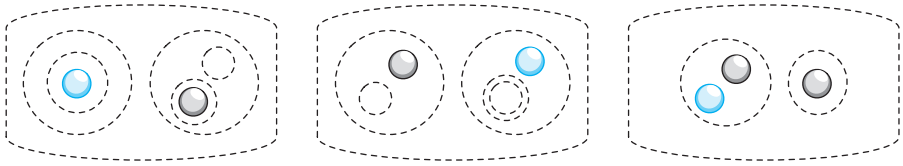
In Abschnitt 3.2.1.3 haben wir gezeigt, dass sich der Begriff des geordneten Paares durch die Definition

$$\langle \xi, \nu \rangle := \{ \{\xi\}, \{\xi, \nu\} \}$$

auf den Begriff der Menge reduzieren lässt. Die gezeigte Möglichkeit ist nur eine von vielen. Beispielsweise können wir geordnete Paare nach einem Vorschlag von Norbert Wiener aus dem Jahr 1914 auch so darstellen [141, 213, 214]:

$$\langle \xi, \nu \rangle := \{ \{\emptyset, \{\xi\}\}, \{\{\nu\}\} \}$$

a) Durch welche der folgenden Mengendiagramme werden die in diesem Kapitel diskutierten Definitionen des geordneten Paares visualisiert?



Links: $\langle \xi, \nu \rangle := \{ \{\emptyset, \{\xi\}\}, \{\{\nu\}\} \}$

Rechts: $\langle \xi, \nu \rangle := \{ \{\xi\}, \{\xi, \nu\} \}$

b) Nach welchem Konstruktionsmuster bildet das verbleibende Diagramm den Begriff des geordneten Paares ab? Ist es für die Darstellung geordneter Paare überhaupt geeignet?

Mitte: $\langle \xi, \nu \rangle := \{ \{\emptyset, \xi\}, \{\{\emptyset\}, \nu\} \}$

Ja, die Darstellung erfüllt ebenfalls ihren Zweck.

Aufgabe 3.9

Webcode 3060

In Abschnitt 3.2.1.2 haben wir herausgearbeitet, dass die Relation ‚$<$‘ keine Wohlordnung auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist.

Definieren Sie die Ordnungsrelation ‚$<$‘ so um, dass $\mathbb{Z}$ zu einer wohlgeordneten Menge wird.

Eine Wohlordnung entsteht z. B. so:

$$x < y \;\Leftrightarrow\; |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$$

Dies liefert die Reihenfolge

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \ldots$$

Aufgabe 3.10
✍✍✍
Webcode 3463

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen ν und μ ist in der Mathematik wie folgt definiert:

$$\nu \times \mu \;:=\; \{\langle x,y\rangle \mid x \in \nu \wedge y \in \mu\}$$

a) Formalisieren Sie das kartesische Produkt im System der ZF-Mengenlehre. Geben Sie hierzu eine Formel $\mathfrak{K}(\xi,\nu,\mu)$ an, die genau dann wahr ist, wenn ξ,ν,μ die Beziehung $\xi = \nu \times \mu$ erfüllen.

$\mathfrak{K}(\xi,\nu,\mu) \;:=\; \forall x\,(x \in \xi \leftrightarrow \exists x_1\,\exists x_2\,(x = \langle x_1,x_2\rangle \wedge x_1 \in \nu \wedge x_2 \in \mu))$

b) Geben Sie eine Formel $\mathfrak{R}(\xi,\nu)$ an, die genau dann wahr ist, wenn ξ eine Relation über der Menge ν ist. Führen Sie Ihre Definition auf die Formel $\mathfrak{K}(\xi,\nu,\mu)$ aus Teilaufgabe a) zurück.

$\mathfrak{R}(\xi,\nu) \;:=\; \exists z\,(\mathfrak{K}(z,\nu,\nu) \wedge \xi \subseteq z)$

c) Auf Seite 168 haben Sie die Formel $\mathfrak{R}(\xi)$ kennen gelernt, die genau dann wahr ist, wenn ξ eine Relation über einer beliebigen Menge ist. Versuchen Sie, für $\mathfrak{R}(\xi)$ eine alternative Definition zu finden, die den Begriff der Relation auf das kartesische Produkt zurückführt.

Vorsicht Falle: Wenn wir tatsächlich $\mathfrak{R}(\xi)$ auf $\mathfrak{K}$ zurückführen könnten, was müssten wir dann für die Variablen ν und μ einsetzen? Ist ξ eine beliebige Relation, so sind ihre Elemente geordnete Paare beliebiger Mengen. μ und ν wären die Menge aller Mengen, die glücklicherweise nicht in ZF existiert.

d) Aufbauend auf dem Relationenbegriff haben wir herausgearbeitet, wie sich der Begriff der partiellen Funktion innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre beschreiben lässt. Lassen sich die Begriffe der *totalen*, der *injektiven* und der *surjektiven Funktion* auf die gleiche Weise formalisieren?

Ja. Sei f eine Funktion. Dann gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$f \text{ ist total} \Leftrightarrow f \text{ ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation}$$
$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist eine linkseindeutige und rechtseindeutige Relation}$$
$$f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist eine rechtstotale und rechtseindeutige Relation}$$

Aufgabe 3.11

Webcode 3567

In dieser Übungsaufgabe greifen wir den formalen Beweis von Satz 3.3 auf, den Beweis über die Komponentengleichheit geordneter Paare.

a) War es wirklich nötig, die Aussage $x = y = u = v$ vollständig zu beweisen?

Nein, die Aussage im Originalbeweis ist stärker als nötig. Anstelle von $x = y = u = v$ zu folgern, reicht es, $y = v$ zu zeigen. Mehr wird im Beweis nicht benötigt.

b) Am Ende des umgangssprachlich formulierten Originalbeweises werden zwei Fälle unterschieden. Zunächst wird der Fall $v \neq u$ betrachtet, danach der Fall $v = u$. Hätten wir im formalen ZF-Beweis auf die Durchführung dieser Fallunterscheidung verzichten können?

Ja, wir hätten darauf verzichten können, da das Hilfstheorem (H11) beide Fälle abdeckt. Ganz los werden wir die Fallunterscheidung aber trotzdem nicht. Sie würde wieder auftauchen, sobald wir versuchen, das Hilfstheorem zu beweisen.

Aufgabe 3.12

Webcode 3234

Welche der folgenden Mengen sind transitiv? Welche sind Ordinalzahlen? Welche sind Kardinalzahlen?

a) $\emptyset$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$

d) $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$

e) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$

f) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

Transitive Mengen sind a), b), e), f)

Ordinalzahlen sind a), b), f)

Kardinalzahlen sind a), b), f)

Aufgabe 3.13

Webcode 3196

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Ist x eine Ordinalzahl, dann ist es auch $\mathcal{P}(x)$.

Die Aussage ist falsch. Die Menge

$$x = \{\, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \,\}$$

ist eine Ordinalzahl. Ferner ist die Menge

$$y = \{\, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \,\}$$

ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$. y ist nicht transitiv und $\mathcal{P}(x)$ damit keine Ordinalzahl.

b) Die Ordinalzahladdition ist kommutativ, d. h., es gilt $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Die Aussage ist falsch. Es ist $1 + \omega = \omega$, aber $\omega + 1 = s(\omega) \neq \omega$

c) Die Ordinalzahlmultiplikation ist kommutativ, d. h., es gilt $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Die Aussage ist falsch. Es ist $2 \times \omega = \omega$, aber $\omega \times 2 \neq \omega$

Aufgabe 3.14

Webcode 3034

Welche der folgenden Aussagen sind jeweils äquivalent zueinander?

a) X ist leer
b) X ist endlich
c) X ist höchstens abzählbar
d) X ist abzählbar
e) X ist unendlich
f) X ist überabzählbar

g) $|X| = \emptyset$ Äquivalent zu a) (Menge ist leer)

h) $|X| = \aleph_0$ Äquivalent zu d) (Menge ist abzählbar)

i) $|X| < \aleph_0$ Äquivalent zu b) (Menge ist endlich)

j) $|X| > \aleph_0$ Äquivalent zu f) (Menge ist überabzählbar)

k) $|X| \leq \aleph_0$ Äquivalent zu c) (Menge ist endlich oder abzählbar)

l) $|X| \geq \aleph_0$ Äquivalent zu e) (Menge ist unendlich)

m) $|X| \in \aleph_0$ Äquivalent zu b) (Menge ist endlich)

n) $|X| \subseteq \aleph_0$ Äquivalent zu c) (Menge ist endlich oder abzählbar)

o) $|X| \subset \aleph_0$ Äquivalent zu b) (Menge ist endlich)

p) $\aleph_0 \in |X|$ Äquivalent zu f) (Menge ist überabzählbar)

q) $\aleph_0 \subseteq |X|$ Äquivalent zu e) (Menge ist unendlich)

r) $\aleph_0 \subset |X|$ Äquivalent zu f) (Menge ist überabzählbar)

Aufgabe 4.1

Webcode 4689

Auf Seite 206 haben Sie gelernt, wie sich Formeln der Peano-Arithmetik auf natürliche Zahlen abbilden lassen. Diese Übungsaufgabe soll Ihnen einen Eindruck über die Größe der Zahlen vermitteln, mit denen wir es hier konkret zu tun haben. Versuchen Sie herauszufinden, welche Formeln den folgenden Gödelnummern entsprechen:

a) 279451225562907928022831663325000000000000

$$= 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^{13} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^{15} \cdot 17^4$$
$$\widehat{=}\ \forall x\, \exists y\, x = y$$

b) 920783852754905293279042680914408826637119384453120000

$$= 2^{23} \cdot 3^{17} \cdot 5^4 \cdot 7^{19} \cdot 11^{15} \cdot 13^4$$
$$\widehat{=}\ s(y) = y$$

Hinweis: Es ist sehr aufwendig, derart große Zahlen per Hand zu faktorisieren. Greifen Sie hierzu auf ein Software-Werkzeug wie Mathematica oder Maple zurück oder verwenden Sie das Web-Portal WolframAlpha.

Aufgabe 4.2

Webcode 4044

Verwenden Sie die auf Seite 209 beschriebene Methode, um die Gödelnummer der Formel $\exists x\, s(x) = x$ zu berechnen. Wiederholen Sie die Rechnung für die Formel $\overline{1} + 0 = \overline{1}$.

Hinweis: Es reicht, wenn Sie die Gödelnummern in faktorisierter Schreibweise notieren. Beide Zahlen besitzen ausgeschrieben weit über hundert Dezimalziffern.

$$
\begin{aligned}
&\exists x\, s(x) = x \\
&= 2^{13} \cdot 3^{2} \cdot 5^{23} \cdot 7^{17} \cdot 11^{2} \cdot 13^{19} \cdot 17^{15} \cdot 19^{2} \\
&= 37373116939301289993545612318515250189642832234669 \\
&\quad 52984065263671875000000000000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{1} + 0 = \overline{1} \\
&= s(0) + 0 = s(0) \\
&= 2^{23} \cdot 3^{17} \cdot 5^{21} \cdot 7^{19} \cdot 11^{25} \cdot 13^{21} \cdot 17^{15} \cdot 19^{23} \cdot 23^{17} \cdot 29^{21} \cdot 31^{19} \\
&= 18250787262870278170563135334902730052938878568308 \\
&\quad 29355360272955164268213994223583004153528889022462 \\
&\quad 80795219655567579012132799734179404967706047310581 \\
&\quad 06438331565659275652074134314352491526624023881831 \\
&\quad 96532000000000000000000000
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.3

Webcode 4884

Eine clevere Art der Gödelisierung hat Raymond Smullyan in [185] vorgeschlagen. In seiner Codierung wird jedem Formelzeichen zunächst einer der folgenden Basiscodes zugeordnet:

0	$'$	(	)	f	,	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\sharp$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Anschließend werden die ermittelten Codes als Ziffern einer Zahl zur Basis 13 aufgefasst. Konkret: Besteht eine Formel φ aus n Zeichen und bezeichnen wir den Basiscode des i-ten Zeichens mit c_i, so berechnet sich die Gödelnummer über die Formel $\ulcorner\varphi\urcorner := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 13^{n-i}$.

a) Ermitteln Sie die Gödelnummer für die Formel $\forall \mathsf{v}\ \mathsf{v} = \mathsf{v}$.

$$\begin{aligned} \text{Zifferncodes}: & \ 9\ 6\ 6\ 10\ 6 \\ \text{Gödelnummer}: & \ 9 * 13^4 + 6 * 13^3 + 6 * 13^2 + 10 * 13^1 + 6 \\ & = 271381 \end{aligned}$$

b) Smullyan verwendet in seiner Logik das Hochkomma für die Nachfolgerfunktion. $0'$ steht für die Zahl 1, $0''$ für die Zahl 2 und so fort. Welche Gödelnummer besitzt der Ausdruck, der stellvertretend für die natürliche Zahl n steht?

Die zugehörige Ziffernfolge setzt sich aus einer 1, gefolgt von n Nullen zusammen.

Damit erhalten wir als Gödelnummer die Zahl 13^n. Clever!

Aufgabe 4.4
✍✍✍
Webcode 4449

Gegeben sei ein Kalkül K, in dem sich Relationen und Funktionen auf die gleiche Weise arithmetisch repräsentieren lassen, wie wir es von der Peano-Arithmetik her gewohnt sind. A_1 und A_2 stehen für die folgenden Aussagen:

A_1 : Repräsentiert φ eine Relation R semantisch, so repräsentiert sie R auch syntaktisch.
A_2 : Repräsentiert φ eine Relation R syntaktisch, so repräsentiert sie R auch semantisch.

Vervollständigen Sie die folgende Aussagenmatrix: Ist der Kalkül K ...	Aussage A_1		Aussage A_2	
	wahr	falsch	wahr	falsch
■ korrekt und vollständig, so ist	✔	○	✔	○
■ korrekt und negationsvollständig, so ist	✔	○	✔	○
■ widerspruchsfrei und vollständig, so ist	✔	○	✔	○
■ widerspruchsfrei und negationsvollständig, so ist	○	✔	○	✔

Hinweise zur Lösungsfindung:

1. Sei K ein vollständiger Kalkül. Dann folgt aus $\models \varphi$ immer $\vdash \varphi$. Damit ist jede semantische Repräsentation von R auch eine syntaktische (A_1 ist wahr).
2. Sei K ein korrekter Kalkül. Dann folgt aus $\vdash \varphi$ immer $\models \varphi$. Damit ist jede syntaktische Repräsentation von R auch eine semantische (A_2 ist wahr).
3. Sei K korrekt und negationsvollständig. Dann folgt aus $\vdash \varphi$ immer auch $\models \varphi$. Da immer entweder φ oder $\neg\varphi$ abgeleitet werden kann, ist K auch vollständig.
4. Sei K widerspruchsfrei und vollständig. Dann folgt aus $\models \varphi$ immer auch $\vdash \varphi$. Da niemals φ und $\neg\varphi$ gleichzeitig abgeleitet werden kann, ist K auch korrekt.

Aufgabe 4.5

✍✍✍

Webcode 4787

Die Gödel'sche Originalarbeit aus dem Jahr 1931 enthält einen handwerklichen Teil, in dem 45 primitiv-rekursive Funktionen und Relationen definiert werden. Los geht es mit zwei Relationen und drei Funktionen:

$$
\begin{aligned}
P_1(x,y) &:\Leftrightarrow \exists z\,(z \leq x \wedge x = y \cdot z) \\
P_2(x) &:\Leftrightarrow \neg\exists\,(z \leq x)\,(z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge P_1(x,z)) \wedge x > 1 \\
f_3(0,x) &:= 0 \\
f_3(n+1,x) &:= \min\{y \leq x \mid P_2(y) \wedge P_1(x,y) \wedge y > f_3(n,x)\} \\
f_4(0) &:= 1 \\
f_4(n+1) &:= (n+1) \cdot f_4(n) \\
f_5(0) &:= 0 \\
f_5(n+1) &:= \min\{y \leq f_4(f_5(n)) + 1 \mid P_2(y) \wedge y > f_5(n)\}
\end{aligned}
$$

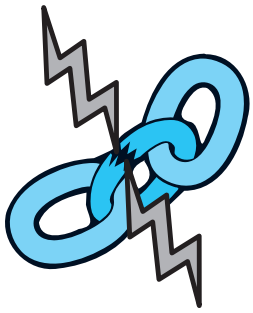
Finden Sie heraus, welche inhaltliche Bedeutung den definierten Relationen und Funktionen zukommt.

$$
\begin{aligned}
P_1(x,y) &\Leftrightarrow x \text{ ist durch } y \text{ teilbar} \\
P_2(x) &\Leftrightarrow x \text{ ist eine Primzahl} \\
f_3(n,x) &= n\text{-te in } x \text{ enthaltene Primzahl} \\
f_4(n) &= n! \\
f_5(n) &= n\text{-te Primzahl}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.6

Webcode 4135

Betrachten Sie die folgende Argumentation:



a) Jede wahre Aussage der Zahlentheorie ist eine logische Folgerungen aus den Peano-Axiomen.

b) Die Peano-Arithmetik formalisiert die Peano-Axiome. Als Theorie erster Stufe erfüllt sie die Voraussetzungen des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes. Dieser besagt, dass in Theorien erster Stufe alle logischen Folgerungen innerhalb des Kalküls bewiesen werden können.

c) Aus a) und b) folgt, dass jede wahre Aussage der Zahlentheorie innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar ist.

Offensichtlich steht das Ergebnis im Widerspruch zu Gödels erstem Unvollständigkeitssatz. Wo steckt der Fehler?

Formulieren wir die Peano-Axiome als Theorie erster Stufe, so ist a) eine falsche Aussage. Aufgrund der Abschwächung des Induktionsaxioms ist nicht jede wahre Aussage der Zahlentheorie eine logische Folgerung aus den Axiomen.

Korrekt muss a) so lauten:

a) Jede wahre Aussage der Zahlentheorie ist eine logische Folgerungen aus den Peano-Axiomen *zweiter Stufe*.

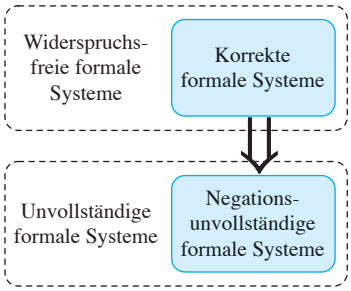
Dann wäre a) korrekt, allerdings greift jetzt der Vollständigkeitssatz nicht mehr, da er nur für Theorien erster Stufe gilt.

Aufgabe 4.7

Webcode 4040

In Abschnitt 4.2 haben Sie die semantische und die syntaktische Variante des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes kennen gelernt. Eine weitere Variante ist diese hier:

„Jedes korrekte formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig."



Die Formulierung ist stärker als die semantische Variante, aber schwächer als die syntaktische. Lässt sie sich dennoch mit wenig Aufwand aus der semantischen Variante herleiten?

Ja. Haben wir die semantische Varianten in Händen, so lässt sich die hier formulierte Variante sehr einfach herleiten. Das einzige, was wir hierfür benötigen ist das Wissen, dass jedes korrekte formale System, das unvollständig ist, immer auch negationsunvollständig ist.

Aufgabe 4.8

Webcode 4895

Auf Seite 224 haben wir behauptet, dass aus den drei Beziehungen

$$z = diag(y) \Rightarrow \vdash \forall \mathsf{z}\,(\mathsf{Diag}(\bar{y},\mathsf{z}) \leftrightarrow \mathsf{z} = \bar{z}) \tag{4.1}$$
$$(x,y) \in B \Rightarrow \vdash \mathsf{B}(\bar{x},\bar{y}) \tag{4.2}$$
$$(x,y) \notin B \Rightarrow \vdash \neg\mathsf{B}(\bar{x},\bar{y}) \tag{4.3}$$

mit ein wenig Umformungsaufwand die folgenden Beziehungen abgeleitet werden können:

$$x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \varphi_y(\bar{y}) \Rightarrow \vdash \psi_{\mathrm{Gdl}}(\bar{x},\bar{y})$$
$$x \text{ codiert keinen Beweis für die Formel } \varphi_y(\bar{y}) \Rightarrow \vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\bar{x},\bar{y})$$

Skizzieren Sie den fehlenden Beweis.

Beweis: 1. Fall: x codiert einen Beweis für die Formel $\varphi_y(\bar{y})$.

Sei z die Gödelnummer von $\varphi_y(\bar{y})$. Dann ist

$$z = diag(y) \tag{4.4}$$
$$(x,z) \in B \tag{4.5}$$

Dann können wir den Beweis folgendermaßen konstruieren:

1. $\vdash \forall \mathsf{z}\,(\mathsf{Diag}(\bar{y},\mathsf{z}) \to \mathsf{z} = \bar{z})$ (aus (4.4) und (4.1))
2. $\vdash \mathsf{B}(\bar{x},\bar{z})$ (aus (4.5) und (4.2))

   ...
3. $\vdash \mathsf{Diag}(\bar{y},\bar{z})$ (aus 1)
4. $\vdash \mathsf{Diag}(\bar{y},\bar{z}) \wedge \mathsf{B}(\bar{x},\bar{z})$ (aus 3 und 2)

   ...
5. $\vdash \exists \mathsf{z}\,(\mathsf{Diag}(\bar{y},\mathsf{z}) \wedge \mathsf{B}(\bar{x},\mathsf{z}))$ (aus 4)
6. $\vdash \psi(\bar{x},\bar{y})$ (Def)

2. Fall: x codiert keinen Beweis für die Formel $\varphi_y(\bar{y})$.

Sei z die Gödelnummer von $\varphi_y(\bar{y})$. Dann ist

$$z = diag(y) \tag{4.6}$$
$$(x,z) \notin B \tag{4.7}$$

Dann können wir den Beweis folgendermaßen konstruieren:

1. $\vdash \forall \mathsf{z}\,(\mathsf{Diag}(\bar{y},\mathsf{z}) \to \mathsf{z} = \bar{z})$ (aus (4.4) und (4.1))
2. $\vdash \neg\mathsf{B}(\bar{x},\bar{z})$ (aus (4.7) und (4.3))

$\ldots$

3. $\vdash\ \mathsf{z} = \bar{z} \to \neg \mathsf{B}(\bar{x}, \mathsf{z})$ (aus 2)

$\ldots$

4. $\vdash\ \mathsf{Diag}(\bar{y}, \mathsf{z}) \to \neg \mathsf{B}(\bar{x}, \mathsf{z})$ (aus 1 und 3)

$\ldots$

5. $\vdash\ \neg(\mathsf{Diag}(\bar{y}, \mathsf{z}) \wedge \mathsf{B}(\bar{x}, \mathsf{z}))$ (aus 4)
6. $\vdash\ \forall \mathsf{z}\, \neg(\mathsf{Diag}(\bar{y}, \mathsf{z}) \wedge \mathsf{B}(\bar{x}, \mathsf{z}))$ (G, 5)

$\ldots$

7. $\vdash\ \neg\exists \mathsf{z}\, (\mathsf{Diag}(\bar{y}, \mathsf{z}) \wedge \mathsf{B}(\bar{x}, \mathsf{z}))$ (aus 6)
8. $\vdash\ \neg\psi(\bar{x}, \bar{y})$ (Def)

Aufgabe 4.9
✍✍✍
Webcode 4875

In Abschnitt 2.6 haben Sie die Prädikatenlogik zweiter Stufe kennen gelernt. Wir haben dort herausgearbeitet, dass wir die Ausdrucksstärke der PL1 durch die Hinzunahme von Prädikat- und Funktionsvariablen erhöhen können. Ebenfalls wurde erwähnt, dass wir dafür einen hohen Preis zahlen müssen. Im Gegensatz zur Prädikatenlogik erster Stufe ist die PL2 nicht mehr vollständig, wenn wir die Standardsemantik zugrunde legen. Das bedeutet, dass kein Kalkül existiert, in dem sich genau diejenigen Formeln der PL2 ableiten lassen, die bezüglich der Standardsemantik allgemeingültig sind.

a) Konstruieren Sie eine PL2-Formel φ, die genau unter jenen Interpretationen wahr ist, deren Individuenbereiche isomorph zu den natürlichen Zahlen sind:

$$(U,I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; U \cong \mathbb{N} \tag{4.8}$$

PA seine diejenige Formel, die aus der Konjunktion der PA-Axiome und den folgenden Ersetzungen entstanden ist:

- Das Symbol 0 wurde durch die Konstante n ersetzt.
- Die Nachfolgeroperation s wurde durch die Funktionsvariable **s** ersetzt.
- Die Operatoren ‚+‘ und ‚×‘ wurden durch die Funktionsvariablen **f** und **g** ersetzt.

Durch die Ersetzung ist PA eine native PL2-Formel geworden und die Formel

$$\varphi := \exists \mathbf{f}\, \exists \mathbf{g}\, \exists \mathbf{s}\, \exists \mathsf{n}\; \mathsf{PA}$$

weist die von uns gesuchte Eigenschaft auf:

$$(U,I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; U \cong \mathbb{N} \tag{4.9}$$

b) Zeigen Sie, dass die Unvollständigkeit der PL2 eine direkte Folge des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes ist.

Die Peano-Axiome, formuliert in der PL2, sind kategorisch, d. h. sie sind genau wahr, wenn der Individuenbereich isomorph zu den natürlichen Zahlen ist. Damit sind wir in der Lage, die Peano-Arithmetik innerhalb der PL2 so „nachzubauen“, dass jede wahre Aussage der Zahlentheorie einer allgemeingültigen PL2-Formel entspricht. Wäre die PL2 vollständig, so ließen sich alle allgemeingülitigen PL2-Formeln beweisen und damit auch jede wahre Aussage der Zahlentheorie. Genau dies ist aber nach dem ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz unmöglich.

c) Zeigen Sie, dass keine PL1-Formel existieren kann, die (4.9) erfüllt.

Gäbe es diese Formel, wir nennen sie $\varphi_{\mathbb{N}}$, so könnten wir sie konjunktiv mit den Peano-Axiomen (formuliert in der PL1) verknüpfen und erhielten so eine kategorische Charakterisierung der natürlichen Zahlen innerhalb der PL1 (effektiv hätten wir durch die Hinzunahme dieser Formel alle Nichtstandardmodelle beseitigt). Mit dem gleichen Argument wie oben würde dann die Unvollständigkeit der PL1 folgen, im Widerspruch zu Gödels Vollständigkeitssatz.

Aufgabe 4.10

Webcode 4998

In Abschnitt 4.2.8 haben wir definiert, was es bedeutet, eine natürliche Zahl mit einer Formel der Peano-Arithmetik zu *benennen*.

Welche Zahlen werden durch die folgenden Formeln benannt?

a) $\mathsf{x}+\mathsf{x}=(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

1

b) $\mathsf{x}+\mathsf{x}=\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

2

c) $\mathsf{x}\times\mathsf{x}=\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$

keine ($\sqrt{2}$ ist keine natürliche Zahl)

d) $\mathsf{x}\times\mathsf{x}=\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

2

Welche der folgenden Aussagen über die Formeln der Peano-Arithmetik sind richtig?

e) *„Jede Formel benennt eine natürliche Zahl."*

Die Aussage ist falsch. Die Formel aus Teil c) ist ein Gegenbeispiel.

f) *„Jede natürliche Zahl wird durch eine Formel benannt."*

Die Aussage ist richtig. Die Zahl n wird z. B. durch die Formel $\mathsf{x}=\overline{n}$ benannt.

g) *„Es gibt für jede natürliche Zahl unendlich viele Möglichkeiten, sie zu benennen."*

Die Aussage ist richtig. Jede der (unendlich vielen) Formeln

$$\underbrace{x+\ldots+x}_{m\text{-mal}}=\underbrace{s(\ldots s(s(s(s}_{n\cdot m\text{-mal}}(0)))))\ldots)$$

benennt die Zahl n.

Aufgabe 5.1

Webcode 5089

Die Instruktionsmengen zweier Turing-Maschinen M_1 und M_2 seien wie folgt gegeben:

$$I_1 := \{(q_1, S_0, S_1, \mathrm{R}, q_2), (q_2, S_0, S_0, \mathrm{R}, q_3), (q_3, S_0, S_2, \mathrm{R}, q_1)\}$$
$$I_2 := \{(q_1, S_0, S_1, \mathrm{R}, q_2), (q_2, S_0, S_0, \mathrm{R}, q_3), (q_3, S_0, S_2, \mathrm{R}, q_1), (q_4, S_0, S_0, \mathrm{R}, q_1)\}$$

a) Erzeugen Sie die Standardbeschreibungen von M_1 und M_2.

$$M_1 : 7313325311731133531117311133225 31 ; DADDCRDAA; DAADDRDAAA; DAAADDCCRDA$$

$$M_2 : 7313325311731133531117311133225317311111335 31 ; DADDCRDAA; DAADDRDAAA; DAAADDCCRDA; DAAAADDRDA$$

b) Analysieren Sie das Verhalten der Maschinen. Welche Unterschiede fallen Ihnen auf?

M_2 besitzt offensichtlich einen anderen Instruktionssatz und damit eine andere Gödelnummer als M_1. Funktional sind M_1 und M_2 aber identisch, da der Zustand q_4 unerreichbar ist und die letzte Instruktion damit niemals ausgeführt werden kann. Quintessenz: Maschinen, die funktional identisch sind, können trotzdem andere Gödelnummern besitzen.

Aufgabe 5.2

Webcode 5743

In Abbildung 5.12 ist die Instruktionstabelle von Turings historischer *universal machine* dargestellt. Unter anderem wird dort die folgende Teilmaschine definiert:

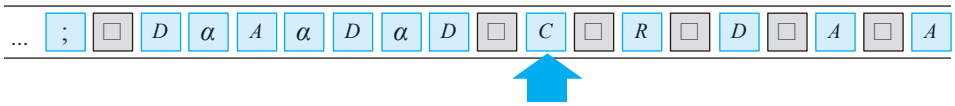
$$\mathtt{con}(\mathfrak{C},\alpha)\begin{cases} \text{Not } A & R,R & \mathtt{con}(\mathfrak{C},\alpha) \\ A & L,P\alpha,R & \mathtt{con}_1(\mathfrak{C},\alpha) \end{cases}$$

$$\mathtt{con}_1(\mathfrak{C},\alpha)\begin{cases} A & R,P\alpha,R & \mathtt{con}_1(\mathfrak{C},\alpha) \\ D & R,P\alpha,R & \mathtt{con}_2(\mathfrak{C},\alpha) \\ \text{None} & PD,R,P\alpha,R,R,R & \mathfrak{C} \end{cases}$$

$$\mathtt{con}_2(\mathfrak{C},\alpha)\begin{cases} C & R,P\alpha,R & \mathtt{con}_2(\mathfrak{C},\alpha) \\ \text{Not } C & R,R & \mathfrak{C} \end{cases}$$

Wird die Maschine in der Konfiguration

gestartet, so terminiert sie nach 10 Berechnungsschritten, und der Schreib-Lese-Kopf steht an der folgenden Bandposition:



a) Tragen Sie den produzierten Bandinhalt in die Abbildung ein.

b) Welche Teilaufgabe könnte die Maschine in Turings Gesamtkonstruktion erfüllen?

Turing verwendet sie, um die ersten beiden Komponenten einer Instruktion zu markieren. Zunächst wird mit einer anderen Maschine das Semikolon gesucht. Danach werden mit der Maschine con die Komponenten q_i, S_j und S_k einer Instruktion markiert, indem links von jedem Zeichen das Symbol α geschrieben wird. Dass neben jeder Bandzelle eine Freizelle existiert, ist ein Grundkonzept in der Arbeitsweise von Turings computing machines. Wie hier deutlich wird, verwendet er sie, um temporärer Markierungen anzubringen oder Zwischenergebnisse zu speichern.

Aufgabe 5.3

Webcode 5272

Damit eine Turing-Maschine von einer universellen Maschine simuliert werden kann, muss sie in geeigneter Weise codiert werden. In dieser Aufgabe geht es um die Codierung, die Turing in seiner Arbeit aus dem Jahr 1936 vorgeschlagen hat.

Bewerten Sie die folgenden Aussagen:

	wahr	falsch
■ Jede natürliche Zahl ist die Gödelnummer einer Maschine.	○	✔
■ Die Codierung ist injektiv.	✔	○
■ Die Codierung ist surjektiv.	○	✔
■ Die Codierung ist bijektiv.	○	✔

Hinweise:

1. Die erste Behauptung ist falsch, da jede Gödelnummer mit der Ziffer 7 anfängt.
2. Die zweite Behauptung ist richtig. Jede Gödelisierung ist injektiv.
3. Die dritte Behauptung ist eine andere Formulierung für die erste und daher falsch.
4. Die vierte Behauptung ist falsch, da jede bijektive Abbildung auch surjektiv sein muss.

Aufgabe 5.4

Webcode 5543

Wir haben gezeigt, dass sich eine Turing-Maschine oder eine Registermaschine auf zwei Arten nutzen lässt: als Transduktor oder als Akzeptor. Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bedeutet dies das Folgende: Als Transduktor nimmt die Registermaschine x als Eingabe entgegen und produziert y als Ausgabe. Als Akzeptor nimmt sie das Tupel (x, y) entgegen und akzeptiert die Eingabe genau dann, wenn x und y die Beziehung $f(x) = y$ erfüllen.

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Zusammenhang zwischen diesen Begriffen herzustellen.

a) Kann eine berechnende Maschine eine akzeptierende Maschine simulieren?

Ja. Wie dies gelingt, lässt sich direkt aus der Definition der Entscheidbarkeit ablesen. Wir müssen lediglich eine berechnende Maschine konstruieren, die als Ergebnis eine 0 oder eine 1 schreibt. Das Eingabewort wird akzeptiert wenn der Funktionswert gleich 1 ist. Es wird abgelehnt, wenn der Ergebniswert gleich 0 ist.

b) Kann eine akzeptierende Maschine eine berechnende Maschine simulieren?

Auch das ist möglich. Angenommen, wir wollen eine Funktion $f(x)$ berechnen, haben aber nur einen Akzeptor zur Verfügung, der genau diejenigen Eingaben (x, y) akzeptiert, für die $y = f(x)$ ist. Um den Funktionswert $f(x)$ zu berechnen, bauen wir den Akzeptor zu einem Aufzähler um, wie es in Abbildung 5.24 beschrieben wurde.

Ist $f(x) \neq 0$, so wird irgendwann das Tupel (x, y) aufgezählt. In diesem Fall schreiben wir y auf das Band und halten an. Ist $f(x) = 0$, so läuft die Maschine für immer weiter. Damit haben wir eine berechnende Maschine für f konstruiert.

Aufgabe 5.5

Webcode 5781

In Abschnitt 5.1.2 haben Sie eine Registermaschine kennen gelernt, die von James P. Jones und Yuri Matijasevič im Jahr 1991 entworfen wurde [102]. Hierbei handelte es sich um einen Transduktor, der in Register R_1 die Eingabe x entgegennimmt und dort auch die Ausgabe $f(x)$ ablegt. Anhand des Ablaufprotokolls aus Abbildung 5.17 konnten Sie einen Eindruck gewinnen, wie sich die Maschine für den Fall $R_1 = 2$ verhält. Nach 23 Schritten hielt sie an und hinterließ in R_1 den Ergebniswert 1.

a) Vervollständigen Sie die nachstehende Liste, indem Sie den Ablauf für weitere Eingaben simulieren:

$f(0) =$ 0 , $f(1) =$ 1 , $f(2) =$ 1 , $f(3) =$ 2 , $f(4) =$ 3 , $f(5) =$ 5

b) Welche bekannte Zahlenfolge wird durch die Registermaschine berechnet?

Die Maschine berechnet die Fibonacci-Zahlen. Sie sind rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} F_0 &:= 0 \\ F_1 &:= 1 \\ F_{n+2} &:= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Aufgabe 5.6

Webcode 5696

Alle diskutierten Registermaschinen waren mit drei Sprungbefehlen ausgestattet:

- L_i : goto L_n
- L_i : if $R_j = 0$ goto L_n
- L_i : if $R_j \neq 0$ goto L_n

a) Ist es möglich, damit den folgenden erweiterten Sprungbefehl zu implementieren?

$$L_i : \text{if } R_j = 0 \text{ goto } L_n \text{ else goto } L_m$$

Ja.

L_i : if $R_j = 0$ goto L_n
L_{i+1} : goto L_m

b) Ändert sich die Ausdrucksstärke des Maschinenmodells, wenn wir uns auf den Sprungbefehl L_i : if $R_j = 0$ goto L_n beschränken?

Nein, die anderen beiden lassen sich simulieren.

Simulation von L_i : goto L_n

L_i : if $R_j = 0$ goto L_n wobei R_j ein nicht verwendetes Register ist.

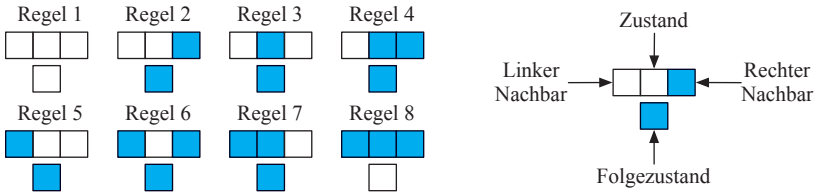
Simulation von L_i : if $R_j \neq 0$ goto L_n

L_i : if $R_j = 0$ goto L_{i+2}
L_{i+1} : goto L_n

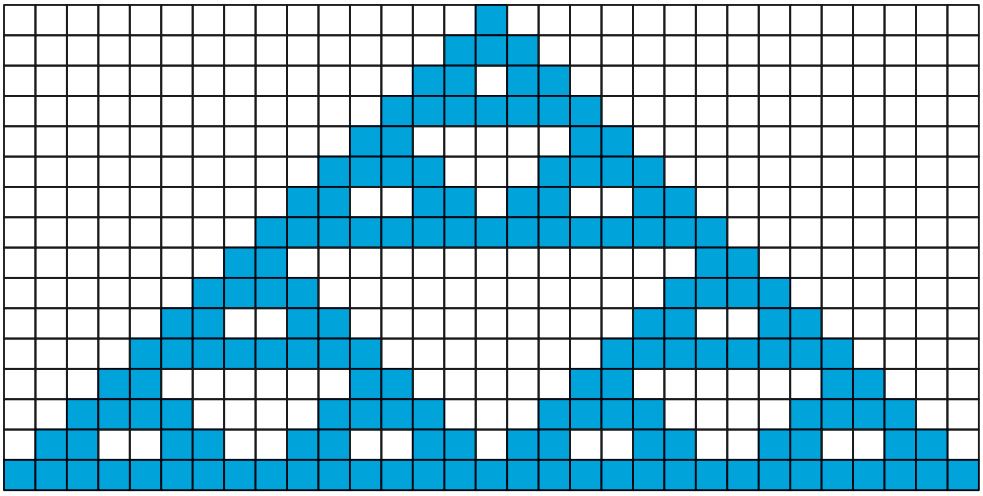
Aufgabe 5.7

Webcode 5742

In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit dem zellulären Automaten beschäftigen, der über das folgende Regelschema definiert ist:



Welche Ihnen bekannte Struktur wird durch diesen Automaten erzeugt? Vervollständigen Sie zur Beantwortung dieser Frage das folgende Diagramm. Die ersten drei Zeilen sind bereits ausgefüllt.



Aufgabe 5.8

Webcode 5911

In dieser Aufgabe geht es um die folgende Turing-Maschine:

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\} \\
S &= \{0, 1\} \\
I &= \{(q_1, 0, 1, \mathrm{R}, q_2), (q_2, 0, 1, \mathrm{R}, q_3), (q_3, 0, 1, \mathrm{R}, q_4), (q_4, 0, 1, \mathrm{L}, q_1), (q_5, 0, 1, \mathrm{R}, q_6), \\
&\quad (q_1, 1, 1, \mathrm{L}, q_3), (q_2, 1, 1, \mathrm{R}, q_2), (q_3, 1, 0, \mathrm{L}, q_5), (q_4, 1, 1, \mathrm{L}, q_4), (q_5, 1, 0, \mathrm{L}, q_1)\}
\end{aligned}
$$

a) Vervollständigen Sie den nachstehend abgedruckten Simulationslauf:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\langle q_1 \rangle$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\langle q_2 \rangle$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	$\langle q_3 \rangle$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	$\langle q_1 \rangle$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	$\langle q_3 \rangle$
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	$\langle q_5 \rangle$
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	$\langle q_1 \rangle$
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	$\langle q_2 \rangle$

0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	$\langle q_3 \rangle$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_4 \rangle$
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_1 \rangle$
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_2 \rangle$
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	$\langle q_2 \rangle$

b) Recherchieren Sie, welche bekannte Turing-Maschine wir hier vor uns haben. Wird die Maschine irgendwann terminieren?

Diese Maschine ist ein bekannter *busy beaver*. Sie terminiert nach 47.176.870 Schritten, mit einem Band, das 4098 Einsen enthält. Die Maschine gilt als ein heißer Kandidat für diejenige Turing-Maschine mit 5 Zuständen, die die meisten Einsen schreibt. Ein formaler Beweis hierfür existiert allerdings nicht.

Dass die Maschine, wie wir sie hier definiert haben, 6 Zustände hat, ist übrigens kein Fehler. Im offiziellen Busy-beaver-Wettbewerb dürfen die Maschinen eine Halte-Kommando absetzen, so dass der Zustand q_6, den wir lediglich als Sackgassenzustand für die Terminierung benutzt haben, entfallen kann.

Aufgabe 5.9

Webcode 5800

In Definition 5.7 haben wir vereinbart, dass eine Menge N genau dann *aufzählbar* ist, wenn eine surjektive und berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to N$ existiert. Welche Konsequenzen ergeben sich, wenn wir die Forderung nach der Surjektivität durch die Forderung nach der Bijektivität ersetzen?

Von der theoretischen Seite her hat dies keine Konsequenzen, da wir jeden Aufzähler so umprogrammieren können, dass er jedes Element nur einmal ausgibt. Hierzu könnte er während der Berechnung alle bisher erzeugten Ausgaben mitprotokollieren und die Ausgabe unterdrücken, falls ein Element schon zuvor ausgegeben wurde. Dass in den meisten Büchern nur die Surjektivität gefordert wird, hat einen ganz praktischen Grund. Viele Aufzählungsalgorithmen lassen sich dann viel einfacher formulieren, da wir nicht mehr darauf achten müssen, jedes Element genau einmal auszugeben.

Aufgabe 5.10

Webcode 5932

In Abschnitt 5.3.2 haben Sie den Satz von Rice kennen gelernt. In einem Rundumschlag macht er die Hoffnung zunichte, irgendeine nichttriviale Eigenschaft von Turing-Maschinen algorithmisch zu entscheiden. Doch ist das wirklich so? Als Beispiel betrachten wir die Eigenschaft einer Maschine, exakt 5 Zustände zu besitzen. Mit einem Blick auf die Instruktionstabelle können wir diese Eigenschaft für jede vorgelegte Maschine immer korrekt entscheiden. Aber genau dies dürfte nach dem Satz von Rice nicht möglich sein, oder vielleicht doch?

Es ist wichtig den Satz von Rice genau zu lesen: Er macht die Hoffnung zunichte, irgendeine nichttriviale *funktionale* Eigenschaft von Turing-Maschinen algorithmisch zu entscheiden. Eine funktionale Eigenschaften ist eine Eigenschaft der Funktion f_T und keine Eigenschaft von T selbst. f_T ist die Funktion, die von T berechnet wird.

Die Eigenschaft, 5 Zustände zu besitzen, ist keine funktionale Eigenschaft. Es ist einfach, zwei Turing-Maschinen T_1 und T_2 zu konstruieren, die eine unterschiedliche Anzahl von Zuständen besitzen und trotzdem die Beziehung $f_{T_1} = f_{T_2}$ erfüllen.

Aufgabe 5.11
✍✍✍
Webcode 5193

In dieser Aufgabe betrachten wir die Formel $\mathrm{Inst}(q_i, S_j, S_k, \mathrm{L}, q_l)$ aus Abschnitt 5.4.1. Mit ihr hat Turing in seiner Arbeit aus dem Jahr 1936 die Linksbewegung einer einseitig beschränkten Turing-Maschine beschrieben:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Inst}(q_i, S_j, S_k, \mathrm{L}, q_l) := \\
&\quad \forall \mathsf{t}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{t}'\, \forall \mathsf{y}'\, ((\mathsf{R}_{\mathsf{S}_j}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{I}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_i}(\mathsf{t}) \wedge \mathsf{F}(\mathsf{t},\mathsf{t}') \wedge \mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{y})) \\
&\qquad \rightarrow (\mathsf{I}(\mathsf{t}',\mathsf{y}') \wedge \mathsf{R}_{\mathsf{S}_k}(\mathsf{t}',\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_l}(\mathsf{t}') \\
&\qquad\quad \wedge \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{z}) \vee \bigwedge_{i=0}^{M} (\mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t},\mathsf{z}) \rightarrow \mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t}',\mathsf{z}))))))
\end{aligned}$$

In Abschnitt 5.1.1.1 haben wir festgelegt, wie sich eine solche Maschine verhält, wenn der Schreib-Lese-Kopf ganz links steht:

> *„Der Schreib-Lese-Kopf einer einseitig beschränkten Turing-Maschine kann sich nicht über das Bandende hinausbewegen. Eine angeforderte Linksbewegung wird in diesem Fall ignoriert, und der Schreib-Lese-Kopf verharrt in seiner Position.“*

Offenbar ist die verbale Beschreibung in der Formel $\varphi_I(\mathsf{x},\mathsf{y})$ überhaupt nicht umgesetzt.

a) Ist der Turing'sche Beweis etwa unvollständig?

Nein. Es ist nämlich gar nicht nötig, das Verhalten für den speziell geschilderten Fall zu behandeln. Im Abschnitt über die einseitig beschränkte Turing-Maschine wurde gezeigt, dass sich eine Turing-Maschine so umbauen lässt, dass sie niemals den Schreib-Lese-Kopf über ein spezielles Marker-Symbol nach links hinausbewegt. Das bedeutet, dass wir davon ausgehen können, dass der geschilderte Fall niemals eintritt. Deshalb brauchte ihn Turing auch nicht in seine Formel explizit hineinzucodieren.

b) Wie schwierig wäre es, die verbale Beschreibung in die Formel $\varphi_I(\mathsf{x},\mathsf{y})$ zu integrieren?

Die folgende Formel erfüllt ihren Zweck:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Inst}(q_i, S_j, S_k, \mathrm{L}, q_l) := \\
&\quad \forall \mathsf{t}\, \forall \mathsf{t}'\, ((\mathsf{R}_{\mathsf{S}_j}(\mathsf{t},0) \wedge \mathsf{I}(\mathsf{t},0) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_i}(\mathsf{t}) \wedge \mathsf{F}(\mathsf{t},\mathsf{t}') \\
&\qquad \rightarrow (\mathsf{I}(\mathsf{t}',0) \wedge \mathsf{R}_{\mathsf{S}_k}(\mathsf{t}',0) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_l}(\mathsf{t}') \\
&\qquad\quad \wedge \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{F}(0,\mathsf{z}) \vee \bigwedge_{i=0}^{M} (\mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t},\mathsf{z}) \rightarrow \mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t}',\mathsf{z}))))) \wedge \\
&\quad \forall \mathsf{t}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{t}'\, \forall \mathsf{y}'\, ((\mathsf{R}_{\mathsf{S}_j}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{I}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_i}(\mathsf{t}) \wedge \mathsf{F}(\mathsf{t},\mathsf{t}') \wedge \mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{y})) \\
&\qquad \rightarrow (\mathsf{I}(\mathsf{t}',\mathsf{y}') \wedge \mathsf{R}_{\mathsf{S}_k}(\mathsf{t}',\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_l}(\mathsf{t}') \\
&\qquad\quad \wedge \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{z}) \vee \bigwedge_{i=0}^{M} (\mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t},\mathsf{z}) \rightarrow \mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t}',\mathsf{z}))))))
\end{aligned}
$$

Ein Problem bleibt noch bestehen. Die 0 steht uns nicht zur Verfügung und muss eliminiert werden. Dies gelingt, indem wir alle Vorkommen von 0 durch eine Variable n ersetzen und für diese Fordern, dass sie für jene Zahl steht, die keinen Vorgänger hat. Wir erhalten dann das folgende Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Inst}(q_i, S_j, S_k, \mathrm{L}, q_l) := \\
&\exists \mathsf{n}\, (\forall \mathsf{z}\, \neg \mathsf{F}(\mathsf{z},\mathsf{n}) \wedge \\
&\quad \forall \mathsf{t}\, \forall \mathsf{t}'\, ((\mathsf{R}_{\mathsf{S}_j}(\mathsf{t},\mathsf{n}) \wedge \mathsf{I}(\mathsf{t},\mathsf{n}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_i}(\mathsf{t}) \wedge \mathsf{F}(\mathsf{t},\mathsf{t}') \\
&\qquad \rightarrow (\mathsf{I}(\mathsf{t}',\mathsf{n}) \wedge \mathsf{R}_{\mathsf{S}_k}(\mathsf{t}',\mathsf{n}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_l}(\mathsf{t}') \\
&\qquad\quad \wedge \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{F}(\mathsf{n},\mathsf{z}) \vee \bigwedge_{i=0}^{M} (\mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t},\mathsf{z}) \rightarrow \mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t}',\mathsf{z}))))) \wedge \\
&\quad \forall \mathsf{t}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{t}'\, \forall \mathsf{y}'\, ((\mathsf{R}_{\mathsf{S}_j}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{I}(\mathsf{t},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_i}(\mathsf{t}) \wedge \mathsf{F}(\mathsf{t},\mathsf{t}') \wedge \mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{y})) \\
&\qquad \rightarrow (\mathsf{I}(\mathsf{t}',\mathsf{y}') \wedge \mathsf{R}_{\mathsf{S}_k}(\mathsf{t}',\mathsf{y}) \wedge \mathsf{K}_{\mathsf{q}_l}(\mathsf{t}') \\
&\qquad\quad \wedge \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{F}(\mathsf{y}',\mathsf{z}) \vee \bigwedge_{i=0}^{M} (\mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t},\mathsf{z}) \rightarrow \mathsf{R}_{\mathsf{S}_i}(\mathsf{t}',\mathsf{z}))))))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.12

Webcode 5892

In Abschnitt 5.4.2 haben wir herausgearbeitet, wie sich Turing-Maschinen arithmetisieren lassen. In diesem Zusammenhang haben wir die PA-Formel $\varphi_I(x,y)$ eingeführt, die den Übergang von einer Konfiguration x in eine Konfiguration y beschreibt. Für die Linksbewegung lautetet sie beispielsweise so:

$$\begin{aligned}
\varphi_I(x,y) \;:=\; & \exists h_1\, \exists h_2\, \exists n_1\, \exists n_2 (\\
& L(x) = n_1 \wedge K(x) = \bar{i} \wedge I(x) = h_1 \wedge R_{h_1}(x) = \bar{j} \wedge \\
& L(y) = n_2 \wedge K(y) = \bar{l} \wedge I(y) = h_2 \wedge \\
& (h_1 \neq 0 \rightarrow (\\
& \quad n_1 = n_2 \wedge h_1 = h_2 + \bar{1} \wedge R_{h_1}(y) = \bar{k} \wedge \\
& \quad \forall (h < n_1)\, (h \neq h_1 \rightarrow \exists s\, (R_h(x) = s \wedge R_h(y) = s)))) \wedge \\
& (h_1 = 0 \rightarrow (\\
& \quad n_1 + \bar{1} = n_2 \wedge R_0(y) = 0 \wedge h_1 = h_2 \wedge R_1(y) = \bar{k} \wedge \\
& \quad \forall (h < n_1)\, (h \neq 0 \rightarrow \exists s\, (R_h(x) = s \wedge R_{h+1}(y) = s)))))
\end{aligned}$$

Wir hätten den Beweis vereinfachen können, indem wir ihn für einseitig beschränkte Turing-Maschinen führen. Wie würde die Formel dann aussehen?

$$\begin{aligned}
\varphi_I(x,y) \;:=\; & \exists h_1\, \exists h_2\, \exists n\, (\\
& L(x) = n \wedge K(x) = \bar{i} \wedge I(x) = h_1 \wedge R_{h_1}(x) = \bar{j} \wedge \\
& L(y) = n \wedge K(y) = \bar{l} \wedge I(y) = h_2 \wedge R_{h_1}(y) = \bar{k} \wedge \\
& h_1 \neq 0 \rightarrow h_1 = h_2 + \bar{1} \wedge \\
& h_1 = 0 \rightarrow h_1 = h_2 \wedge \\
& \forall (h < n)\, (h \neq h_1 \rightarrow \exists s\, (R_h(x) = s \wedge R_h(y) = s))))
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.13

Webcode 5970

Am Beispiel der diophantischen Gleichung

$$(x+1)^3+(y+1)^3=(z+1)^3$$

haben wir in Abschnitt 5.4.3 argumentiert, dass es einen Unterschied darstellt, ob wir nach Lösungen in den ganzen Zahlen oder in den natürlichen Zahlen suchen.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung in den ganzen Zahlen unendlich viele Lösungen hat.

Man setze z. B. $y=-1$ und $x=z$.

b) Warum ist die Gleichung in den natürlichen Zahlen unlösbar?

Die Unlösbarkeit ist eine direkte Folge aus dem Fermat'schen Satz.

Aufgabe 5.14

Webcode 5100

In Abschnitt 5.4.3 haben wir erarbeitet, wie sich diophantische Gleichungen konjunktiv oder disjunktiv zusammenfassen lassen.

a) Welche Relationen werden durch die folgenden beiden Gleichungen repräsentiert?

$$a+x+1-b=0 \lor b+y+1-a=0$$

$$\begin{aligned} a+x+1-b=0 \lor b+y+1-a=0 \\ \Leftrightarrow a<b \lor b<a \\ \Leftrightarrow a \neq b \end{aligned}$$

$$a+x-b=0 \land b+y-a=0$$

$$\begin{aligned} a+x-b=0 \land b+y-a=0 \\ \Leftrightarrow a \leq b \land b \leq a \\ \Leftrightarrow a=b \end{aligned}$$

b) Formen Sie die Ausdrücke in gewöhnliche diophantische Gleichungen um.

$$\begin{aligned} a+x+1-b=0 \lor b+y+1-a=0 \\ \Leftrightarrow (a+x+1-b)\cdot(b+y+1-a)=0 \\ \Leftrightarrow ab+ay+a-a^2+bx+xy+x-ax+b+y+1-a-b^2-by-b+ab=0 \\ \Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2+ay-ax+bx-by+xy+x+y+1=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+x-b=0 \land b+y-a=0 \\ \Leftrightarrow (a+x-b)^2+(b+y-a)^2=0 \\ \Leftrightarrow ((a-b)+x)^2+(y-(a-b))^2=0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2+2x(a-b)+x^2+y^2-2y(a-b)+(a-b)^2=0 \\ \Leftrightarrow 2(a-b)^2+2x(a-b)+x^2+y^2-2y(a-b)=0 \\ \Leftrightarrow 2a^2-4ab+2b^2+2ax-2bx+x^2+y^2-2ay-2by=0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.15

Webcode 5651

R und S seien zwei diophantisch repräsentierbare Relationen.

a) Ist die Relation $R \cup S$ diophantisch repräsentierbar?

Ja. Wird R durch $r = 0$ repräsentiert und S durch $s = 0$,

so wird $R \cup S$ durch $r = 0 \vee q = 0$ repräsentiert.

b) Ist die Relation $R \cap S$ diophantisch repräsentierbar?

Ja. Wird R durch $r = 0$ repräsentiert und S durch $s = 0$,

so wird $R \cap S$ durch $r = 0 \wedge q = 0$ repräsentiert.

Aufgabe 5.16

Webcode 5999

In Abbildung 5.41 ist eine diophantische Gleichung mit 26 Unbekannten aufgeführt, die genau dann eine Lösung in den positiven natürlichen Zahlen besitzt, wenn $k+2$ eine Primzahl ist.

a) Kann diese Gleichung dazu verwendet werden, alle Primzahlen aufzuzählen?

Ja. Setze nacheinander aller Kombinationen ein und rechne die Gleichung aus. Ist die Kombination eine Lösung, dann gebe die Zahl $k+2$ aus.

b) Lässt sich die Menge aller Primzahlzwillinge ebenfalls diophantisch repräsentieren?

Ja. Durch

$$\text{prime}(x) \wedge \text{prime}(y) \wedge x+2-y=0$$

Aufgabe 5.17

Webcode 5156

Das nachstehende Registermaschinenprogramm stammt aus der mehrfach zitierten Arbeit von Jones und Matijasevič aus dem Jahr 1984 [101]:

L_0	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$		$R_2 \leftarrow R_2 - 1$	L_{11}	if $R_2 < R_1$ goto L_{10}
L_1	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$	L_6	if $0 < R_2$ goto L_5	L_{12}	$R_1 \leftarrow R_1 - 1$
L_2	if $R_3 = 0$ goto L_5	L_7	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$		$R_2 \leftarrow R_2 - 1$
L_3	$R_3 \leftarrow R_3 - 1$		$R_4 \leftarrow R_4 - 1$		$R_3 \leftarrow R_3 - 1$
L_4	goto L_2	L_8	if $0 < R_4$ goto L_7	L_{13}	if $0 < R_1$ goto L_{12}
L_5	$R_3 \leftarrow L_3 + 1$	L_9	if $R_3 < R_1$ goto L_5	L_{14}	stop
	$R_4 \leftarrow R_4 + 1$	L_{10}	if $R_1 < R_3$ goto L_1		

a) Mit $R_i < R_j$ wird eine Operation verwendet, die unser Registermaschinenmodell nicht von Hause aus unterstützt. Zeigen Sie, dass sich die Operationen mit den nativen Sprachelementen nachbilden lassen.

Die Abfrage $R_i < R_j$ lässt sich simulieren, indem R_i und R_j zunächst in freie Register R'_i und R'_j kopiert werden. Anschließend werden beide schrittweise um 1 verringert. Erreicht R'_i zuerst den Wert 0, dann ist $R_i < R_j$.

b) Führen Sie das Programm für die Eingabe $R_1 = 2$ händisch aus und erstellen Sie ein Ablaufdiagramm, das ähnlich aussieht wie jenes aus Abbildung 5.17. Beachten Sie, dass die Programmausführung in Zeile L_0 beginnt und nicht, wie bisher, in Zeile L_1.

	Zeile	Befehl	R_1	R_2	R_3	R_4
1	L_0	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$	2	0	0	0
2	L_1	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$	2	1	0	0
3	L_2	if $R_3 = 0$ goto L_5	2	2	0	0
4	L_5	$R_3 \leftarrow R_3 + 1$ $R_4 \leftarrow R_4 + 1$ $R_2 \leftarrow R_2 - 1$	2	2	0	0
5	L_6	if $0 < R_2$ goto L_5	2	1	1	1
6	L_5	$R_3 \leftarrow R_3 + 1$ $R_4 \leftarrow R_4 + 1$ $R_2 \leftarrow R_2 - 1$	2	1	1	1
7	L_6	if $0 < R_2$ goto L_5	2	0	2	2
8	L_7	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$ $R_4 \leftarrow R_4 - 1$	2	0	2	2
9	L_8	if $0 < R_4$ goto L_7	2	1	2	1
10	L_7	$R_2 \leftarrow R_2 + 1$ $R_4 \leftarrow R_4 - 1$	2	1	2	1
11	L_8	if $0 < R_4$ goto L_7	2	2	2	0
12	L_9	if $R_3 < R_1$ goto L_5	2	2	2	0
13	L_{10}	if $R_1 < R_3$ goto L_1	2	2	2	0
14	L_{11}	if $R_2 < R_1$ goto L_{10}	2	2	2	0
15	L_{12}	$R_1 \leftarrow R_1 - 1$ $R_2 \leftarrow R_2 - 1$ $R_3 \leftarrow R_3 - 1$	2	2	2	0
16	L_{13}	if $0 < R_1$ goto L_{12}	1	1	1	0
17	L_{12}	$R_1 \leftarrow R_1 - 1$ $R_2 \leftarrow R_2 - 1$ $R_3 \leftarrow R_3 - 1$	1	1	1	0
18	L_{13}	if $0 < R_1$ goto L_{12}	0	0	0	0
19	L_{14}	stop	0	0	0	0

c) Stellen Sie für diese Berechnungssequenz die Daten- und Kontrollflussmatrix auf. Wie eine solche Matrix aussieht, wurde in Abbildung 5.43 gezeigt.

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	t
0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	R_1
0	0	1	1	2	2	2	2	2	1	1	0	0	1	1	2	2	1	0	R_2
0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0	R_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0	0	0	R_4

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	t
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	L_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	L_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	L_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	L_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	L_6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	L_7
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	L_8
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_9
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_{10}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_{11}
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_{12}
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_{13}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L_{14}

d) Wenn Sie die Registermaschine für verschiedene Eingabewerte starten, werden Sie feststellen, dass sie in manchen Fällen hält und in anderen für immer weiter rechnet. Versuchen Sie, einen Zusammenhang zwischen dem Eingabewert und der Terminierungseigenschaft herzustellen.

Das Programm terminiert genau dann, wenn die Eingabe in R_1 eine Primzahl ist.

Aufgabe 5.18
✍✍✍
Webcode 5548

In Abschnitt 5.4.3.2 haben wir gezeigt, wie sich Registermaschinen diophantisch codieren lassen. Die von uns konstruierte Gleichung enthielt unter anderem den Teilausdruck

$$L_1 \preccurlyeq I \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; L_l \preccurlyeq I \tag{5.10}$$

Er stellt sicher, dass $L_1, \ldots, L_l$ ausschließlich aus den Ziffern 0 und 1 besteht. Darüber hinaus hatten wir über den Teilausdruck

$$I = \sum_{i=1}^{l} L_i \tag{5.11}$$

erzwungen, dass in jeder Spalte der Kontrollflussmatrix höchstens eine 1 vorkommt. Auf den ersten Blick scheinen wir (5.10) gar nicht zu benötigen, da deren inhaltliche Aussage augenscheinlich aus (5.11) folgt. Beweisen oder widerlegen Sie diese Vermutung.

Die Vermutung ist falsch!

Man setze $l := 2$, $Q := 4$, $L_1 := 02_Q$ und $L_2 := 03_Q$.

Für die gewählten Werte von L_1 und L_2 ist (5.10) falsch. Andererseits ist $L_1 + L_2 = 11_Q$ und damit (5.11) wahr. Wir müssen also tatsächlich beide Teilausdrücke in die diophantische Gleichung aufnehmen.

Aufgabe 6.1

Webcode 6988

Mit r_i $(i \geq 0)$ bezeichnen wir die i-te Ziffer einer zufälligen Binärsequenz. In welchen der nachfolgend aufgelisteten Fälle ist die Sequenz $s_0, s_1, s_2, \ldots$ zufällig?

a) $s_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i < 10 \\ r_i & \text{sonst} \end{cases}$

Zufällig

b) $s_i = \begin{cases} r_{r_i} & \text{falls } i \text{ gerade} \\ r_i & \text{sonst} \end{cases}$

Zufällig

c) $s_i = \begin{cases} r_i & \text{falls } i < 10 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nicht zufällig

d) $s_i = \begin{cases} r_i & \text{falls } i \text{ eine Primzahl ist} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nicht zufällig

e) $s_i = \begin{cases} r_i & \text{falls } i \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nicht zufällig

f) $s_i = \begin{cases} r_i & \text{falls } i \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nicht zufällig

Aufgabe 6.2

Webcode 6125

Benennen Sie, falls möglich, ein Beispiel für eine *endlich* lange Binärsequenz, die

- berechenbar und komprimierbar ist: 1111111111...1
- berechenbar, aber nicht komprimierbar ist: jede beliebige Zufallssequenz
- unberechenbar, aber komprimierbar ist: nicht möglich
- unberechenbar und nicht komprimierbar ist: nicht möglich

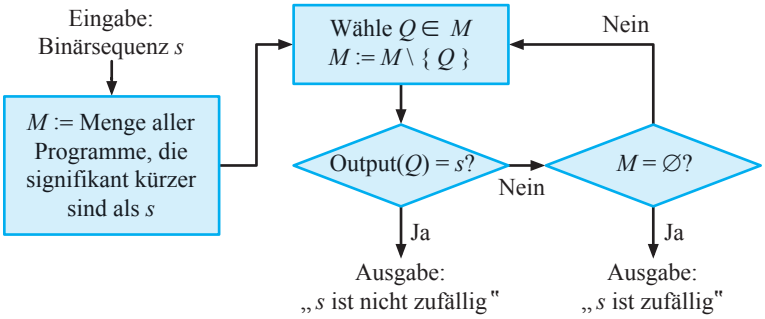
Benennen Sie, falls möglich, ein Beispiel für eine *unendlich* lange Binärsequenz, die

- berechenbar und komprimierbar ist: Kreiszahl π
- berechenbar, aber nicht komprimierbar ist: nicht möglich
- unberechenbar, aber komprimierbar ist: Haltesequenz H
- unberechenbar und nicht komprimierbar ist: Chaitin'sche Konstante Ω

Aufgabe 6.3

Webcode 6879

In dieser Aufgabe wollen wir die inhaltliche Aussage von Satz 6.2 auf die Probe stellen. Der Satz besagt, dass kein systematisches Verfahren existieren kann, das stets korrekt entscheidet, ob eine vorgelegte Binärsequenz s zufällig ist oder nicht. Das nachstehende Programm scheint aber genau dies zu leisten:



Der Algorithmus basiert auf der folgenden Überlegung: Es existieren nur endlich viele Programme, die kürzer sind als die vorgelegte Binärsequenz s. Wäre diese Sequenz nicht zufällig, so muss sie von einem dieser Programme ausgegeben werden. Wir müssen also lediglich über die (endlich vielen) Programme iterieren, die signifikant kürzer sind als s, und die produzierte Ausgabe mit s vergleichen. Stimmen beide überein, so ist s keine Zufallssequenz. Wird s von keinem dieser Programme ausgegeben, dann liegt eine zufällige Sequenz vor. Offensichtlich steht das Ergebnis im Widerspruch zu Satz 6.2. Wo steckt der Fehler?

Der augenscheinliche Widerspruch lässt sich schnell auflösen. Das Problem ist, dass wir die Ausgabe des Programms Q nur dadurch bestimmen können, dass wir Q ausführen. Da nicht jedes Programm Q terminiert, wird unser Programm zwangsläufig in eine Endlosschleife geraten.

Könnten wir vorab entscheiden, welche Programme terminieren und welche nicht, so wäre die algorithmische Komplexität auf die skizzierte Weise tatsächlich berechnenbar. Damit haben wir einen wichtigen Zusammenhang aufgedeckt. Aus der Unberechenbarkeit von $\kappa(s)$ folgt unmittelbar, dass wir die Terminierung von Turing-Maschinen nicht algorithmisch entscheiden können. Die Überlegung zeigt, wie stark die inhaltliche Aussage von Satz 6.2 wirklich ist. Aus ihm erhalten wir Turings berühmter Satz über die Unentscheidbarkeit des Halteproblems als Korollar.

Aufgabe 6.4

Webcode 6788

In Kapitel 1 haben wir die Vermutung über die Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge diskutiert. In Worten las sie sich wie folgt:

> *„Es existieren unendlich viele Zahlen n mit der Eigenschaft, dass n und $n+2$ Primzahlen sind.“*

Wir nehmen in dieser Aufgabe an, die Haltewahrscheinlichkeit Ω_n sei für beliebige Werte von n bekannt. Auf Seite 354 haben wir dargelegt, wie sich mit diesem Wissen z. B. die Goldbach'schen Vermutung beweisen oder widerlegen ließe. Könnten wir mit der gleichen Methode auch die Zwillingsvermutung entscheiden?

Für die Goldbach'sche Vermutung funktionierte die beschriebene Methode so:

- Es wird ein Programm geschrieben, das nach einem Gegenbeispiel sucht. Das Programm terminiert, sobald ein Gegenbeispiel gefunden wurde. Gibt es keine Gegenbeispiele, so läuft das Programm unendlich lange weiter.
- Würden wir die Haltewahrscheinlichkeiten Ω_n kennen, so ließe sich entscheiden, ob das Programm hält (Goldbach'sche Vermutung wäre falsch) oder nicht hält (Goldbach'sche Vermutung wäre wahr).

Die Methode lässt sich nicht eins zu eins auf die Zwillingsvermutung übertragen, da wir nicht auf die gleiche Weise ein Programm schreiben können, das nach einem Gegenbeispiel sucht. Hierfür verantwortlich ist die Tatsache, dass wir hier eine Existenzaussage vor uns haben (es existieren unendlich viele...). Ein gefundenes Primzahlpaar nutzt nichts, um eine Aussage zu treffen, genauso wenig wie ein Primzahlpaar, das kein Zwillingspaar ist.

Aufgabe 6.5

Webcode 6286

In Abschnitt 6.2 haben wir herausgearbeitet, dass die Bitfolge der Chaitin'schen Konstanten zufällig ist. Ob an einer bestimmten Bitposition von Ω eine 0 oder eine 1 vorkommt, ist damit völlig unabhängig von den Bits an anderen Positionen. Können wir trotzdem eine Aussage darüber treffen, *wie viele* Einsen und Nullen in einem Anfangsstück $\Omega[1 \ldots n]$ für größere Werte von n enthalten sein müssen?

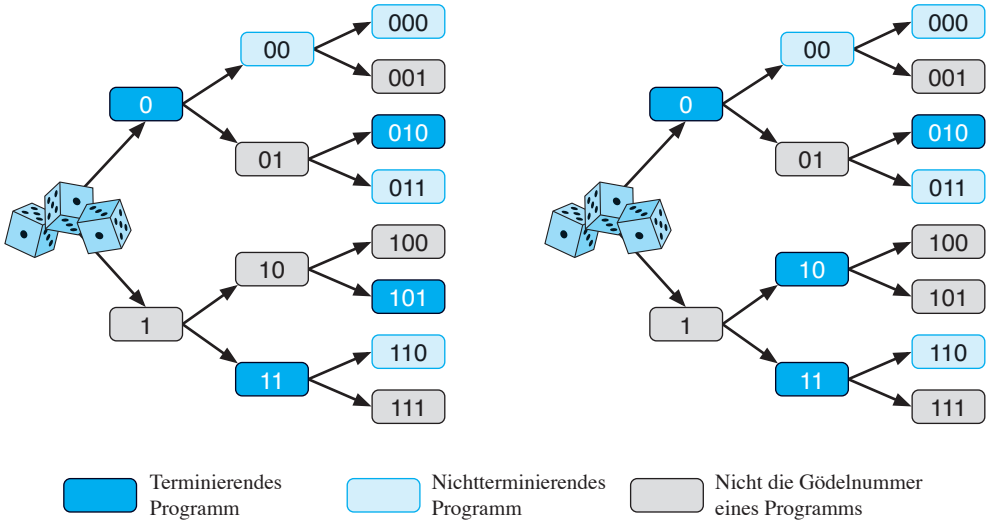
Ja. Aus Satz 6.4 folgt unmittelbar, dass die Bitfolge der Chaitin'schen Konstanten genauso viele Nullen wie Einsen enthalten muss.

Aufgabe 6.6

Webcode 6799

In den Untersuchungen zur algorithmischen Komplexität haben wir vorausgesetzt, dass die zugrunde gelegten Gödelisierungen präfixfrei sein müssen. Das bedeutet, dass die Gödelnummer eines Programms niemals mit der Gödelnummer eines anderen Programms beginnt. Diese Aufgabe soll klären, warum wir diese Voraussetzung benötigen.

Betrachten Sie hierzu die folgenden beiden Entscheidungsbäume:



- Begründen Sie, warum die jeweils verwendeten Gödelisierungen nicht präfixfrei sind.

  Beispielsweise ist sowohl 00 als auch 000 die Gödelnummer eines Programms. 000 beginnt aber mit 00.

- Berechnen Sie für jeden Entscheidungsbaum die Haltewahrscheinlichkeit Ω_3.

  - Links:
    Von den Sequenzen 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 beginnen 7 mit der Gödelnummer eines terminierenden Programms (000, 001, 010, 011, 101, 110, 111).
    Ergebnis: $\Omega_3 = 7/8$
  - Rechts:
    Von den Sequenzen 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 beginnen 8 mit der Gödelnummer eines terminierenden Programms (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111).
    Ergebnis: $\Omega_3 = 8/8 = 1$

- Wiederholen Sie die Berechnung mit der nachstehenden Formel, die wir in Abschnitt 6.2 hergeleitet haben. Was stellen Sie fest?

$$\Omega_n = \sum_{\substack{P \text{ hält,} \\ |P| \leq n}} \frac{1}{2^{|P|}}$$

Links: $\Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$

Rechts: $\Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$

Beobachtung:

1. Obwohl links und rechts gleich viele terminierende Programme existieren, ergibt die Formel ein anderes Ergebnis. Wir können aus Ω_n daher nicht mehr zurückrechnen, wie viele terminierende Programme tatsächlich existieren.
2. Der Wert von Ω_n kann sogar größer als 1 werden. Offensichtlich ist Ω_n gar keine Wahrscheinlichkeit mehr.

Fazit: Die Präfixfreiheit ist essenziell. Setzen wir sie nicht voraus, so machen die hergeleiteten Formeln für Ω_n und für Ω keinen Sinn.

Aufgabe 7.1

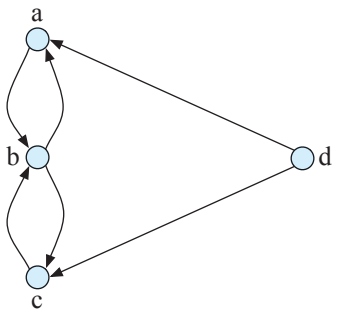
Webcode 7731

In dieser Übungsaufgabe wollen wir die Prädikatenlogik erster Stufe verwenden, um gerichtete Graphen zu beschreiben. Hierzu fassen wir die Individuenmenge U einer Interpretation (U,I) als die Knotenmenge eines Graphen auf und legen über das zweistellige Prädikatzeichen E fest, ob zwischen zwei Knoten x und y eine Kante verläuft. Das folgende Beispiel verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Interpretationen und Graphen:

- Interpretation (U,I)

$$\begin{aligned} U &:= \{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}\} \\ I(\mathsf{E}) &:= \{(\mathrm{a},\mathrm{b}), \\ &\quad\ (\mathrm{b},\mathrm{a}), \\ &\quad\ (\mathrm{b},\mathrm{c}), \\ &\quad\ (\mathrm{c},\mathrm{b}), \\ &\quad\ (\mathrm{d},\mathrm{a}), \\ &\quad\ (\mathrm{d},\mathrm{c})\} \end{aligned}$$

- Graph G



Ferner sei die folgende Liste von prädikatenlogischen Formeln erster Stufe gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \neg\mathsf{E}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \\ \varphi_2 &:= \neg\exists\mathsf{z}_1\,(\mathsf{E}(\mathsf{a},\mathsf{z}_1)\wedge\mathsf{E}(\mathsf{z}_1,\mathsf{b})) \\ \varphi_3 &:= \neg\exists\mathsf{z}_1\,\exists\mathsf{z}_2\,(\mathsf{E}(\mathsf{a},\mathsf{z}_1)\wedge\mathsf{E}(\mathsf{z}_1,\mathsf{z}_2)\wedge\mathsf{E}(\mathsf{z}_2,\mathsf{b})) \\ \ldots &:= \ldots \end{aligned}$$

a und b sind Konstantensymbole.

a) Welche intuitive Bedeutung besitzt die Formel φ_n?

Von a nach b existiert kein Pfad der Länge n.

b) Die Eigenschaft, ein zusammenhängender Graph zu sein, ist nicht innerhalb der Prädikatenlogik erster Stufe definierbar. Beweisen Sie diese Behauptung, indem Sie zeigen, dass keine PL1-Formel φ mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$(U,I)\models\varphi \;\Leftrightarrow\; (U,I) \text{ beschreibt einen zusammenhängenden Graphen}$$

Hinweis: Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn für zwei beliebig gewählte Knoten x und y stets ein Pfad von x nach y existiert. Ein Pfad von x nach y ist eine endliche Folge von Kanten, die x und y in der gewünschten Richtung miteinander verbinden.

Wir nehmen an, die Formel φ würde existieren und betrachten die Menge

$$M := \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$$

Jede endliche Teilmenge von M ist erfüllbar, schließlich können wir einen Graphen konstruieren, der aus $n+2$ Knoten besteht und die Knoten a und b nur über einen Weg der Länge $n+1$ miteinander verbindet. Hierin ist n der größte Index, der in den Formeln φ_n vorkommt.

Nach dem Kompaktheitssatz müsste dann auch M erfüllbar sein, was nicht sein kann. Es müsste gleichzeitig einen Graphen geben, der zusammenhängend ist, aber zwischen zwei beliebigen Knoten weder ein Pfad der Länge 1, noch ein Pfad der Länge 2, noch ein Pfad der Länge 3, usw. existiert.

Aufgabe 7.2

Webcode 7145

K sei ein formales System, in dem sich arithmetische Aussagen ableiten lassen. Wir nehmen an, K erfüllt die folgende Eigenschaft:

$$\vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \not\models \varphi$$

- Theoreme von K sind z. B. $1+1=3$, $\exists \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \mathsf{x} > \mathsf{y}$, $\neg\exists \mathsf{y}\, 1+\mathsf{y}=2, \ldots$
- Keine Theoreme von K sind z. B. $1+1=2$, $\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \mathsf{x} \leq \mathsf{y}$, $\exists \mathsf{y}\, 1+\mathsf{y}=2, \ldots$

K ist der perfekte Lügner, da genau diejenigen arithmetischen Formeln aus den Axiomen abgeleitet werden können, die im Standardmodell der Peano-Arithmetik falsch sind.

a) Lassen sich die Symbole ‚s‘, ‚=‘, ‚+‘ und ‚×‘ so uminterpretieren, dass K ein Modell besitzt?

Ja. Der Kalkül ist widerspruchsfrei (es gibt keine Formel, für die sowohl φ als auch $\neg\varphi$ ableitbar ist, da eine dieser beiden Formeln wahr sein muss). Aus dem Modellexistenzsatz folgt, dass K ein Modell besitzt.

b) Kann ein formales System mit der postulierten Eigenschaft überhaupt existieren?

Nein. K kann nicht existieren. Wir könnten K zu einem K' umbauen mit

$$K \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; K' \vdash \neg\varphi$$

K' wäre dann ein vollständiger und korrekter Kalkül für die Peano-Arithmetik, der nach dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz nicht existieren kann.

Aufgabe 7.3

Webcode 7878

Sei φ eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Hat φ ein endliches Modell, dann hat φ auch ein unendliches Modell.

Die Aussage ist falsch. Beispielsweise ist die Formel

$$\exists x \, \forall y \, (x \doteq y)$$

genau dann wahr, wenn der Individuenbereich ein einziges Element umfasst.

b) Hat φ ein unendliches Modell, dann hat φ auch ein endliches Modell.

Die Aussage ist falsch. Beispielsweise ist die Formel

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \, (\neg P(x,x) \wedge \exists y \, P(x,y))$$

genau dann wahr, wenn P als transitive Relation interpretiert wird, in der jedes Element zu einem anderen in Relation steht, aber niemals zu sich selbst. Dies ist aber nur möglich, wenn der Individuenbereich unendlich ist. φ hat also ein unendliches, aber kein endliches Modell. Beachten Sie, dass wir in der konstruierten Formel das Gleichheitszeichen gar nicht benötigt haben. Das gleiche Argument gilt also auch in der Prädikatenlogik ohne Gleichheit.

c) Lassen sich a) oder b) mithilfe des Satzes von Löwenheim-Skolem-Tarski beantworten?

Für Teil a): Nein. Die Voraussetzung des Satzes von Löwenheim-Skolem-Tarski, dass ein unendliches Modell existiert, ist nicht erfüllt.

Für Teil b) Nein. Der Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski besagt, dass Modelle beliebiger *transfiniter* Kardinalität existieren. Er sagt aber nichts über endliche Modelle aus.

Aufgabe 7.4

Webcode 7000

Der Satz von Euklid besagt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Hieraus folgt, dass keine natürliche Zahl x existieren kann, die von jeder Primzahl geteilt wird. Innerhalb der Peano-Arithmetik können wir den Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken:

$$\varphi \;:=\; \neg\exists \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathrm{prime}(\mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{y} \mid \mathsf{x})$$

Ganz offensichtlich ist die Formel φ im Standardmodell der Peano-Arithmetik eine wahre Aussage. Wie üblich nehmen wir an, die Peano-Arithmetik sei frei von Widersprüchen.

- Zeigen Sie, dass φ nicht innerhalb der Peano-Arithmetik bewiesen werden kann.

  Die Formel ist unbeweisbar, da PA ein Nichtstandardmodell besitzt, in dem φ eine falsche Aussage ist. Wir folgern die Existenz dieses Modells aus dem Kompaktheitssatz. Es sei

  $$\varphi_y \;:=\; \exists \mathsf{z}\, \mathsf{z} \times \bar{\mathsf{y}} = \mathsf{c}$$

  Die Formel drückt aus, dass y ein Teiler von c ist. Jetzt betrachten wir die Menge

  $$\{\varphi_p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

  Jede endliche Teilmenge hat ein Modell. Die Konstante c wird einfach mit dem Produkt aller in der Teilmenge vorkommenden Primzahlen belegt. Daraus folgt, dass auch die Menge selbst ein Modell hat. In diesem Modell wird die Konstante c mit einem Element belegt, dass von allen Primzahlen geteilt wird.

- Ist die Unbeweisbarkeit von φ eine Folge des Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes?

  Nein. Die Unbeweisbarkeit rührt einzig und alleine daher, dass die Formel φ nicht in allen Modellen wahr ist, in denen die PA-Axiome wahr sind. Die Ursache geht also auf die Eigenschaft von PA zurück, nicht kategorisch zu sein. Dies hat mit dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz aber gar nichts zu tun. Dieser gilt z.B. auch in kategorischen Theorien wie z. B. die Peano-Arithmetik, formuliert als Theorie zweiter Stufe.

Aufgabe 7.5

Webcode 7304

In der von uns gewählten Formulierung gilt der Modellexistenzsatz auch für die Prädikatenlogik mit Gleichheit. Beschränken wir uns auf die PL1 ohne Gleichheit, so können wir ihn sogar geringfügig verschärfen:

Satz 7.1 (Modellexistenz der PL1 ohne Gleichheit)

Sei K eine Theorie erster Ordnung. Dann gilt:

- K hat ein abzählbares Modell $\Leftrightarrow$ K ist widerspruchsfrei

Der Unterschied ist unscheinbar, aber dennoch bemerkenswert: In der Prädikatenlogik ohne Gleichheit können wir aus der Widerspruchsfreiheit nicht nur die Existenz eines Modells, sondern die Existenz eines *abzählbaren* Modells folgern.

a) Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus für den Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski?

Auch dieser Satz kann dann verstärkt werden. Jede Formel, die ein Modell besitzt, hat dann automatisch ein unendliches. Der Satz lautet dann wie folgt:

Satz 7.2 (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski für die PL1 ohne Gleichheit)

Sei M eine Menge von Formeln der PL1 ohne Gleichheit und κ eine beliebige transfinite Kardinalzahl. Dann gilt:

- φ hat ein Modell $\Rightarrow$ φ hat ein Modell mit $|U| = \kappa$

b) Zeigen Sie, dass die vorgenommene Verallgemeinerung nicht für die Prädikatenlogik mit Gleichheit gilt.

Die Formel

$$\exists x \, \forall y \; x = y$$

ist genau unter jenen Interpretationen wahr, die einen einelementigen Individuenbereich aufweisen. Die Formel hat also ein Modell, aber kein abzählbares.

Aufgabe 7.6

Webcode 7837

Sei $M := \{N \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in N\}$

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

	Wahr	Falsch
■ M ist ein Filter.	✔	○
■ M ist ein maximaler Filter.	✔	○
■ M ist ein Ultrafilter.	✔	○
■ M ist ein freier Ultrafilter.	○	✔

b) Sei F ein Ultrafilter. Was lässt sich über seine Elemente aussagen, wenn wir wissen, dass die Menge $\{1\}$ in ihm enthalten ist?

F ist ein Filter, also gehören auch alle Obermengen zu F:

$$\{N \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in N\} \subseteq F$$

Gehören noch zusätzliche Mengen dazu? Die Antwort ist Nein! Wir nehmen an, es gäbe eine solche Menge und nennen sie M. Offensichtlich kann M die Zahl 1 nicht enthalten. Dann wäre aber die Komplementmenge $\overline{M}$ bereits in F. Da eine Menge nicht zusammen mit ihrem Komplement in einem Filter enthalten sein darf, kann M nicht dazugehören. Somit ist

$$F = \{N \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in N\}$$

Aufgabe 7.7

Webcode 7481

In dieser Aufgabe sind E_1 und E_2 zwei Enumeratoren mit

$$E_1 := \{5,8,9,18,19,25,33\}$$
$$E_2 := \{8,12,19,23,24,25,31,32,39,49,60\}$$

a) Erzeugen Sie jeweils eine Matrixdarstellung von E_1 und von E_2:

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	3	6	10	15	…
1	2	4	7	11	16	22	…
2	5	8	12	17	23	30	…
3	9	13	18	24	31	39	…
4	14	19	25	32	40	49	…
5	20	26	33	41	50	60	…
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\ddots$
	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4,5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	3	6	10	15	…
1	2	4	7	11	16	22	…
2	5	8	12	17	23	30	…
3	9	13	18	24	31	39	…
4	14	19	25	32	40	49	…
5	20	26	33	41	50	60	…
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\ddots$
	$\emptyset$	$\{2,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4,5\}$	

b) Für welche der folgenden Mengen ist E_1 bzw. E_2 ein Enumerator?

$M_1 := \{\emptyset, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ $\qquad$ $M_3 := \{\{2,3\}, \{2,4\}\}$

$M_2 := \{\emptyset, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,4,5\}\}$ $\qquad$ $M_4 := \{\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,4,5\}\}$

E_1 ist ein Enumerator für M_1 und M_3.

E_2 ist ein Enumerator für M_1, M_2, M_3 und M_4.

Aufgabe 7.8
✍✍✍
Webcode 7988

In Abschnitt 7.3 haben wir explizit festgelegt, dass ein Enumerator einer Menge M auch ein Enumerator für alle Teilmengen von M ist.

Nehmen Sie für den Moment an, wir hätten auf die Teilmengenregel verzichtet. Dann wäre eine Menge $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ genau dann ein Enumerator für eine Menge $M \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wenn M exakt diejenigen Mengen enthält, die in der Matrixdarstellung von E vorkommen. Die Menge

$$E = \{0, 4, 12, 24, 40, 60\}$$

wäre also ausschließlich ein Enumerator für die Menge

$$M = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$$

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	3	6	10	15	…
1	2	4	7	11	16	22	…
2	5	8	12	17	23	30	…
3	9	13	18	24	31	39	…
4	14	19	25	32	40	49	…
5	20	26	33	41	50	60	…
y	↑	↑	↑	↑	↑	↑	⋱
	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	

Auf den ersten Blick scheint diese Definition unsere intuitive Vorstellung eines Enumerators besser zu erfassen als die ursprüngliche, und dennoch haben wir sie bewusst nicht verwendet. Welche Gründe könnte es hierfür geben?

Die leere Menge wäre dann ein Problem. Wir haben keine einfache Möglichkeit, in der Matrixdarstellung zwischen der leeren Menge (alle Einträge einer Spalte wären frei) und einer leergelassenen Spalte (alle Einträge der Spalte wären dann ebenfalls frei) zu unterscheiden. Damit haben wir keine Möglichkeit, einem Enumerator anzusehen, ob dieser eine Menge beschreibt, die die leere Menge enthält oder nicht. Durch die Teilmengenregel haben wir dieses Problem elegant umgangen.

Aufgabe 7.9

✍✍✍

Webcode 7111

a) Bildet das Tripel $(\mathcal{P}(\emptyset), \cap, \cup)$ eine boolesche Algebra?

Ja, es ist die kleinstmögliche boolesche Algebra, die überhaupt existiert. Sie hat genau ein Element.

b) Zeigen Sie, dass keine boolesche Algebra $(V, \wedge, \vee)$ mit $|V| \geq 2$ existiert, die eine endliche Grundmenge V mit einer ungeraden Anzahl an Elementen besitzt.

Zunächst leiten wir zwei wichtige Zwischenergebnisse her:

(1) Ist $|V| \geq 2$, so ist immer $1 \neq 0$.
Beweis: Angenommen, es sei $1 = 0$. Ist $|V| \geq 2$, so existiert ein x mit $x \neq 0$. Für dieses x gilt $x = x \wedge 1 = x \wedge 0 = 0$. Widerspruch! □

(2) Ist $|V| \geq 2$, so ist immer $\neg x \neq x$.
Beweis. Aus $\neg x = x$ folgt $x = x \vee x = x \vee \neg x = 1$ und gleichzeitig $x = x \wedge x = x \wedge \neg x = 0$. Es wäre also $1 = 0$. Widerspruch. □

Jetzt definieren wir auf V die Relation '$\sim$' mit

$$x \sim y \;\Leftrightarrow y = x \text{ oder } y = \neg x$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass '$\sim$' eine Äquivalenzrelation ist ('$\sim$' ist reflexiv, symmetrisch und transitiv). Das bedeutet, dass '$\sim$' die Menge V partitioniert. Konkret fasst '$\sim$' jedes $x \in V$ mit seinem inversen Element zu einer Äquivalenzklasse zusammen:

$$[x]_\sim \;=\; \{x, \neg x\}$$

Ist $|V| \geq 2$, so enthält jede Äquivalenzklasse wegen (2) genau 2 Elemente. Das bedeutet, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen, multipliziert mit 2, genau die Anzahl der Elemente von V ergibt. Für $|V| \geq 2$ ist $|V|$ also stets eine gerade Zahl.

Aufgabe 7.10
✍✍✍
Webcode 7573

Die nachfolgende Liste enthält eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten, die in jeder booleschen Algebra gelten müssen. Zeigen Sie, dass sich alle Gesetze aus den vier Huntington'schen Axiomen ableiten lassen.

- Assoziativgesetze

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

- Idempotenzgesetze

$$x \vee x = x$$
$$x \wedge x = x$$

- Absorptionsgesetze

$$x \vee (x \wedge y) = x$$
$$x \wedge (x \vee y) = x$$

- Gesetze von De Morgan

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$
$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

- Eliminationsgesetze

$$x \vee 1 = 1$$
$$x \wedge 0 = 0$$

- Doppelnegationsgesetz

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

Herleitung von $x \vee x = x$

$$\begin{aligned} & x \vee x \\ = & (x \vee x) \wedge 1 \\ = & (x \vee x) \wedge (x \vee \neg x) \\ = & x \vee (x \wedge \neg x) \\ = & x \vee 0 \\ = & x \end{aligned}$$

Herleitung von $x \vee 1 = 1$

$$\begin{aligned} & x \vee 1 \\ = & (x \vee 1) \wedge 1 \\ = & (x \vee 1) \wedge (x \vee \neg x) \\ = & x \vee (1 \wedge \neg x) \\ = & x \vee \neg x \\ = & 1 \end{aligned}$$

Herleitung von $x \vee (x \wedge y) = x$

$$
\begin{aligned}
& x \vee (x \wedge y) \\
= & (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) \\
= & x \wedge (1 \vee y) \\
= & x \wedge (y \vee 1) \\
= & x \wedge 1 \\
= & x
\end{aligned}
$$

Herleitung von $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$$
\begin{aligned}
& x \vee (y \vee z) \\
= & (x \vee (y \vee z)) \wedge 1 \\
= & (x \vee (y \vee z)) \wedge (x \vee \neg x) \\
= & [(x \vee (y \vee z)) \wedge x] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [x] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [x \vee (x \wedge z)] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [(x \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge z)] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [x \wedge ((x \vee y) \vee z)] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [(x \vee (y \vee z)) \wedge \neg x] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [\neg x \wedge (x \vee (y \vee z))] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [(\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge (y \vee z))] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [0 \vee (\neg x \wedge (y \vee z))] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [\neg x \wedge (y \vee z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [(\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [(0 \vee (\neg x \wedge y)) \vee (\neg x \wedge z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [((\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y)) \vee (\neg x \wedge z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [(\neg x \wedge (x \vee y)) \vee (\neg x \wedge z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [\neg x \wedge ((x \vee y) \vee z)] \\
= & [((x \vee y) \vee z) \wedge x] \vee [((x \vee y) \vee z) \wedge \neg x] \\
= & ((x \vee y) \vee z) \wedge [x \vee \neg x] \\
= & ((x \vee y) \vee z) \wedge 1 \\
= & (x \vee y) \vee z
\end{aligned}
$$

Herleitung von $\neg\neg x = x$

$$\neg\neg x$$

$$
\begin{aligned}
&= \neg\neg x \wedge 1 \\
&= \neg\neg x \wedge (x \vee \neg x) \\
&= (\neg\neg x \wedge x) \vee (\neg\neg x \wedge \neg x) \\
&= (\neg\neg x \wedge x) \vee 0 \\
&= (\neg\neg x \wedge x) \vee (x \wedge \neg x) \\
&= (\neg\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge x) \\
&= (\neg\neg x \vee \neg x) \wedge x \\
&= (\neg x \vee \neg\neg x) \wedge x \\
&= 1 \wedge x \\
&= x
\end{aligned}
$$

Herleitung von $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

$$
\begin{aligned}
& \neg(x \vee y) \\
&= \neg((x \vee y) \vee 0) \\
&= \neg((x \vee y) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg(((x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg(((x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y)) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg((((x \vee \neg x) \vee y) \wedge (x \vee (y \vee \neg y))) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg(((1 \vee y) \wedge (x \vee 1)) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg((1 \wedge 1) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg(1 \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg((\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \wedge ((x \vee y) \vee \neg(\neg x \wedge \neg y))) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge (x \vee y))) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee ((\neg x \wedge \neg y \wedge x) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge y))) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee (((\neg x \wedge x) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge (\neg y \wedge y)))) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee ((0 \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge 0))) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee (0 \vee 0)) \\
&= \neg(\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee 0) \\
&= \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) \\
&= \neg x \wedge \neg y
\end{aligned}
$$

Die Herleitung der jeweils komplementären Regel funktioniert analog.

Aufgabe 7.11

Webcode 7287

Auf Seite 403 haben wir mit der Relation ‚$\leq$' eine Ordnung auf den Elementen einer booleschen Algebra eingeführt. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b \;\Leftrightarrow\; a \to b = 1$$

Die Beziehung $a \leq b$ bedeutet: $a \wedge b = a$.

1. Wir zeigen: $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$

$$\begin{aligned} a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b &= (a \wedge b) \vee b \\ &= b \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $a \vee b = b \Rightarrow a \to b = 1$

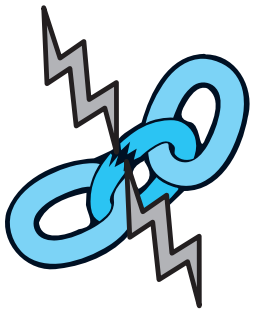
$$\begin{aligned} a \vee b = b \Rightarrow a \to b &= \neg a \vee b \\ &= \neg a \vee (a \vee b) \\ &= (\neg a \vee a) \vee b \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $a \to b = 1 \Rightarrow a \wedge b = a$

$$\begin{aligned} a \to b = 1 \Rightarrow a \wedge b &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge (\neg a \vee b) \\ &= a \wedge (a \to b) \\ &= a \wedge 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Aufgabe 7.12

Webcode 7212



In Abschnitt 7.5 haben wir das Grundmodell $\mathcal{M}$ mithilfe der Forcing-Technik zu einem Modell $\mathcal{M}[G]$ erweitert, das eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\aleph_2$ enthält. Wenden wir die Forcing-Maschinerie ein zweites Mal an, und zwar auf das Modell $\mathcal{M}[G]$, so können wir daraus ein weiteres Modell erzeugen, in dem z. B. eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\aleph_3$ besteht. Dann gäbe es in diesem Modell auch eine Bijektion zwischen $\aleph_2$ und $\aleph_3$, was nicht sein kann.

Was haben wir in dieser Argumentation übersehen?

Es wurde übersehen, dass sowohl das Konzept der Potenzmenge als auch das Konzept der Kardinalzahl ein relatives ist. Das bedeutet, dass diejenigen Mengen, die die Rolle der reellen Zahlen oder die Rolle der Kardinalzahlen $\aleph_2$ oder $\aleph_3$ übernehmen, von Modell zu Modell variieren. Folgerichtig ist die Menge, die in $\mathcal{M}[G]$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\aleph_2$ herstellt, auch in dem dritten Modell, wir nennen es $\mathcal{M}[GG]$ noch vorhanden, sie ist dort aber lediglich eine Bijektion zwischen Mengen, die dort eben nicht mehr zwangsläufig die reellen Zahlen oder die Kardinalzahl $\aleph_2$ repräsentieren. Wir haben also lediglich den folgenden Zusammenhang:

$$\mathcal{M}[GG] \models |\aleph_2^{\mathcal{M}[G]}| = |\aleph_3^{\mathcal{M}[G]}| \tag{7.12}$$

Der im Aufgabentext suggerierte Widerspruch bedeutet symbolisch

$$\mathcal{M}[GG] \models |\aleph_2^{\mathcal{M}[GG]}| = |\aleph_3^{\mathcal{M}[GG]}|,$$

was etwas anderes ist als (7.12).

Zusammengefasst gilt: Im Aufgabentext wurde das Absolutheitsprinzip für Mengen unterstellt, deren Bedeutung relativ ist.

Aufgabe 7.13

✍✍✍

Webcode 7226

Wir wollen das Modelltheorem 7.13 auf die die Halbordnung $(P, \supseteq)$ anwenden, mit:

$$P := \{f : \aleph_1^{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \mid f \in \mathcal{M} \text{ und } \operatorname{dom}(f) \text{ ist in } \mathcal{M} \text{ höchstens abzählbar}\}$$

In Worten ausgedrückt umfasst P alle in $\mathcal{M}$ enthaltenen partiellen Funktionen, die auf einer in $\mathcal{M}$ abzählbaren Teilmenge von $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ definiert sind und jedem Element des Definitionsbereichs eine Menge zuordnen, die in $\mathcal{M}$ zu den reellen Zahlen gehört. Geordnet sind die Elemente aus P durch die Obermengenbeziehung.

Wir definieren die folgenden Mengen:

$$D_\alpha := \{p \in P \mid \alpha \in \operatorname{dom}(p)\} \tag{7.13}$$

$$D_x := \{p \in P \mid x \in \operatorname{ran}(p)\} \tag{7.14}$$

In Worten ausgedrückt enthält die Menge D_α alle Funktionen aus P, die an der Stelle $\alpha \in \aleph_1^{\mathcal{M}}$ definiert sind, und die Menge D_x alle Funktionen aus P, die mindestens ein Element auf die reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ abbilden.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Mengen für alle $\alpha \in \aleph_1^{\mathcal{M}}$ und alle $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ dicht in P sind.

1. Wir zeigen: Für jedes $q \in P$ existiert ein $p \in D_\alpha$ mit $p \leq q$.
   Ist $\alpha \in \operatorname{dom}(q)$, so setzen wir $p := q$ und sind fertig. Ist $\alpha \notin \operatorname{dom}(q)$, so setzen wir $p := q \cup \{(\alpha, 0)\}$. Dann gilt $p \in D_\alpha$ und $p \leq q$, was zu zeigen war.
2. Wir zeigen: Für jedes $q \in P$ existiert ein $p \in D_x$ mit $p \leq q$.
   Ist $x \in \operatorname{ran}(q)$, so setzen wir $p := q$ und sind fertig. Ist $x \notin \operatorname{ran}(q)$, so wählen wir ein $\alpha \in \aleph_1^{\mathcal{M}}$ mit $\alpha \notin \operatorname{dom}(q)$ und setzen $p := q \cup (\alpha, x)$. Dann gilt $p \in D_x$ und $p \leq q$, was zu zeigen war. Dass ein solches α immer existiert, folgt aus der Eigenschaft von P, nur Funktionen zu enthalten, deren Definitionsbereich in $\mathcal{M}$ höchstens abzählbar ist. Der Definitionsbereich solcher Funktionen kann die Menge $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ nicht vollständig überdecken.

b) Es sei G ein generischer Filter von P. Zeigen Sie, dass die Menge $\bigcup G$ eine totale und surjektive Funktion von $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ nach $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ ist.

1. Wir zeigen: f ist eine partielle Funktion von $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ nach $\mathbb{R}$.
   Wir müssen zeigen, dass die Elemente in G paarweise kompatible Funktionen sind, d. h., dass zwei beliebige Funktionen $p, q \in G$ stets zu einer gemeinsamen Funktion erweitert werden können. Eine solche Erweiterung ist genau dann möglich, wenn p und q jedem α, das im Schnitt ihrer Definitionsbereiche liegt, den gleichen Funktionswert zuordnen.
   Die Kompatibilität von p, q ergibt sich aus der Filtereigenschaft von G. Aus $p, q \in G$ folgt, dass ein Element r in G enthalten ist mit $r \leq p$ und $r \leq q$. Das Element r kann aber nur dann in P enthalten sein, wenn es eine Funktion ist, und das bedeutet, dass die Funktionswerte von p und q im Schnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen müssen.

2. Wir zeigen: f ist total und surjektiv.

   Beide Eigenschaften von f folgen aus der Eigenschaft von G, generisch zu sein. Diese Eigenschaft bedeutet, dass G alle dichten Teilmengen schneidet und damit insbesondere auch die Mengen D_α und D_x, und zwar für alle $\alpha \in \aleph_1^{\mathcal{M}}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus ergibt sich zum einen, dass die Funktion f überall definiert sein muss (Totalität), und zum anderen, dass ihr Bildbereich die reellen Zahlen vollständig überdeckt (Surjektivität).

c) Das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe bedeutet: $\mathcal{M}[G] \models |\mathbb{R}^{\mathcal{M}}| \leq |\aleph_1^{\mathcal{M}}|$. Folgt daraus, dass die Kontinuumshypothese in $\mathcal{M}[G]$ wahr ist?

Die Kontinuumshypothese ist in $\mathcal{M}[G]$ tatsächlich wahr, allerdings können wir dieses Ergebnis nicht direkt aus Teilaufgabe b) ableiten. Der Sinn dieser Aufgabe ist, genau dies zu sehen.

Der in Teil b) erarbeitete Zusammenhang

$$\mathcal{M}[G] \models |\mathbb{R}^{\mathcal{M}}| \leq \aleph_1^{\mathcal{M}} \tag{7.15}$$

ist nämlich nicht das, was wir benötigen. Es wird eine Aussage über die Mengen $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ und $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ gemacht, also über jene Mengen, die in $\mathcal{M}$ die Rolle der reellen Zahlen bzw. die Rolle der Kardinalzahl $\aleph_1$ übernehmen. Wir können uns aber nicht darauf verlassen, dass diese Mengen in $\mathcal{M}[G]$ dieselben sind. Was wir benötigen, ist eine Aussage über die Mengen $\mathbb{R}^{\mathcal{M}[G]}$ und $\aleph_1^{\mathcal{M}[G]}$ und nicht über die Mengen $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ und $\aleph_1^{\mathcal{M}}$.

Um den letzten Beweisschritt zu vollziehen, ist eine Eigenschaft von $(P, \leq)$ notwendig, die als σ-Abgeschlossenheit bezeichnet wird und außerhalb dessen liegt, was wir in diesem Buch besprechen können.

Aufgabe 7.14

Webcode 7954

Sei $(\mathbb{B}, U, I)$ ein boolesches Modell einer Theorie T. Ferner sei φ ein Theorem von T.

a) Ergänzen Sie die nachstehenden Gleichungen und begründen Sie Ihre Angaben.

$$[\![\varphi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = \boxed{1} \qquad [\![\neg\varphi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = \boxed{0}$$

Ist $(\mathbb{B}, U, I)$ ein boolesches Modell einer Theorie T, so sind per Definition alle Theoreme wahr, d. h., es ist $[\![\varphi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = 1$. Das inverse Element von 1 ist 0 und somit ist $[\![\neg\varphi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = 0$.

b) Angenommen, die Theorie T sei negationsvollständig und ψ eine beliebige Formel in der Sprache von T. Was können Sie über den Wert $[\![\psi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)}$ aussagen?

Es gilt entweder $[\![\psi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = 1$ oder $[\![\psi]\!]_{(\mathbb{B},U,I)} = 0$. Die anderen Werte der booleschen Algebra können dann niemals vorkommen.