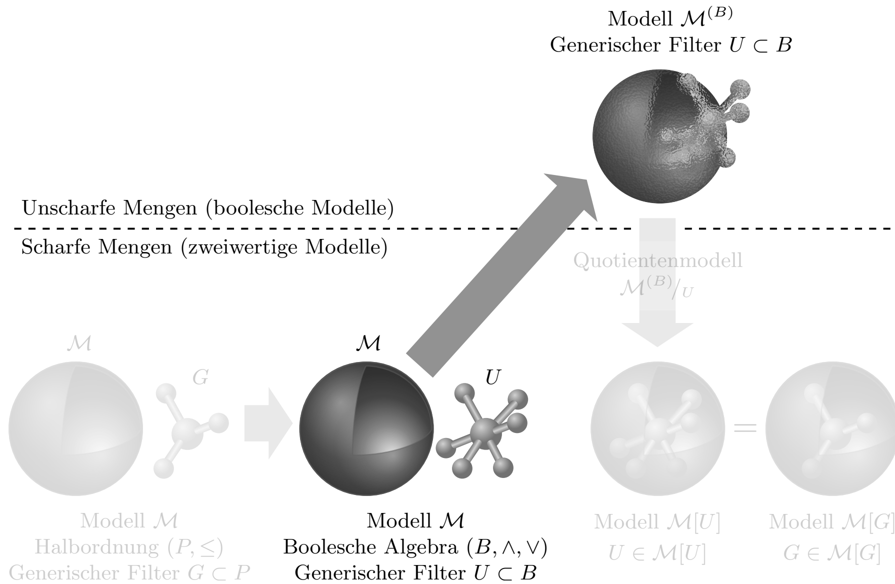
5 Boolesche Modelle



5.1 Das Modell $\mathcal{M}^{(B)}$

> *„In classical logic, formulas take their values in the space $\{true,\ false\}$, the simplest non-trivial Boolean algebra. It is an easy generalization to allow formulas to take their values in other complete Boolean algebras.“*
>
> Raymond M. Smullyan, Melvin Fitting [43]

In Abschnitt 3.4 haben wir dargelegt, was unter einem Modell von ZFC zu verstehen ist, und mit $\mathcal{M}$ die Existenz eines abzählbaren Standardmodells postuliert. In diesem Kapitel werden wir aus $\mathcal{M}$ das boolesche Modell $\mathcal{M}^{(B)}$ konstruieren, in dem die klaren Konturen der uns bisher bekannten Mengen verschwimmen.

5.1.1 Boolesche Mengen

Für alle gewöhnlichen Mengen gilt, dass eine Menge u in einer anderen Menge x enthalten ist oder nicht. Im ersten Fall schreiben wir $u \in x$ und im zweiten $u \notin x$. In diesem Abschnitt werden wir Formeln über booleschen Mengen interpretieren, die eine besondere Spielart der unscharfen Mengen sind. Informell gesprochen zeichnet sich eine unscharfe Menge dadurch aus, dass ein Element nicht vollständig zu einer Menge gehören muss, sondern auch nur zu einem gewissen Grad darin enthalten sein kann.

Zu den bekanntesten unscharfen Mengen gehören die *Fuzzy-Mengen*, die die Zugehörigkeit eines Elements u an eine Wahrscheinlichkeit $p(u)$ aus dem Intervall $[0\,;1]$ koppeln. Beispielsweise ist

$$x := \{(a, 1), (b, \tfrac{1}{2}), (c, 0)\}$$

eine Fuzzy-Menge, die das Element a vollständig, das Element b eventuell und das Element c gar nicht enthält.

Das Beispiel macht deutlich, dass Fuzzy-Mengen in Form von gewöhnlichen Mengen beschrieben werden. Unscharfen Mengen sind also keine fremdartigen Konstrukte, die uns zu einer Erweiterung des mathematischen Begriffsgerüsts zwingen, sondern lediglich Mengen mit einer besonderen Struktur. In unserer bekannten Terminologie ist eine unscharfe Menge eine Funktion, die jedem Element des Definitionsbereichs ein Element zuordnet, das die Mengenzugehörigkeit modelliert. Im Falle der Fuzzy-Mengen sind diese Elemente reelle Zahlen aus dem Intervall $[0\,;1]$.

Mit der Mengenzugehörigkeit wird auch der Wahrheitsgehalt einer Aussage φ zu einer unscharfen Größe. Legen wir als Beispiel die oben definierte Menge x zugrunde, so gibt es neben wahren Aussagen wie $a \in x$ und falschen Aussagen wie $c \in x$ nun auch Aussagen wie $b \in x$, die nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wahr sind. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, mit der die Aussage φ zutrifft, mit $[\![\varphi]\!]$, so können wir für unser Beispiel schreiben:

$$\begin{aligned}
[\![a \in x]\!] &= 1 \\
[\![b \in x]\!] &= \tfrac{1}{2} \\
[\![c \in x]\!] &= 0
\end{aligned}$$

Die booleschen Mengen, für die wir uns in diesem Kapitel interessieren, folgen dem gleichen Muster. Wir erhalten sie aus dem Konzept der Fuzzy-Menge, indem wir den Elementen nicht mehr länger eine Wahrscheinlichkeit aus dem Intervall $[0\,;1]$, sondern ein Element einer booleschen Algebra B zuweisen. Damit ist auch der Wahrheitswert einer Aussage keine Wahrscheinlichkeit mehr, sondern ebenfalls ein Element aus B. Da in jeder booleschen Algebra die Werte 1 und 0 existieren, können wir weiterhin

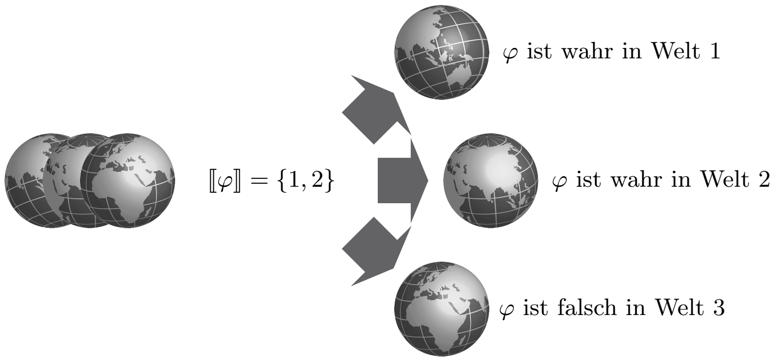


Abbildung 5.1: Welteninterpretation boolescher Wahrheitswerte

von wahren und falschen Aussagen sprechen. Eine Aussage φ mit $[\![\varphi]\!] = 1$ heißt wahr und eine Aussage mit $[\![\varphi]\!] = 0$ falsch.

Analog zu den Fuzzy-Mengen ließen sich auch die Elemente von B als Wahrscheinlichkeiten interpretieren, zielführender ist an dieser Stelle aber das Denken in Welten. Als Beispiel betrachten wir die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \cap, \cup)$, die uns mittlerweile gut vertraut ist. Die drei Elemente 1, 2 und 3 können wir uns als drei mögliche Welten vorstellen und den Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]$ als die Menge der Welten, in denen die Formel φ eine wahre Aussage ist. Eine Formel mit $[\![\varphi]\!] = 1$ ist in allen Welten wahr, eine Formel mit $[\![\varphi]\!] = 0$ in allen Welten falsch und eine Formel mit $[\![\varphi]\!] = \{1, 2\}$ in den Welten $\{1\}$ und $\{2\}$ wahr und in der Welt $\{3\}$ falsch (Abbildung 5.1). Durch das Denken in Welten werden die Wahrheitswerte, d. h. die Elemente der als Beispiel gewählten Potenzmengenalgebra, so in ihre Bestandteile zerlegt, dass wir erneut von wahren und falschen Aussagen sprechen können. Die Wahrheit oder Falschheit einer Formel kann dabei variieren, je nachdem, in welcher Welt wir sie betrachten.

Als Beispiel schauen wir uns die folgenden beiden booleschen Mengen an:

$$x := \{(\emptyset, \{2, 3\}), (\{(\emptyset, \{1, 3\})\}, \{1, 3\})\}$$
$$y := \{(\emptyset, \{1, 3\}), (\{(\emptyset, \{1, 2, 3\})\}, \{1, 2, 3\})\}$$

Bevor wir mit diesen Mengen arbeiten, wollen wir sie in eine übersichtlichere Darstellung übersetzen, die für die gewählten Beispiele folgendermaßen aussieht:

$$x := \{\emptyset^{2,3}, \{\emptyset^{1,3}\}^{1,3}\}$$
$$y := \{\emptyset^{1,3}, \{\emptyset^{1,2,3}\}^{1,2,3}\}$$

Abbildung 5.2 zeigt für jede der drei möglichen Welten, welche realen Mengen sich hinter diesen booleschen Mengen verbergen.

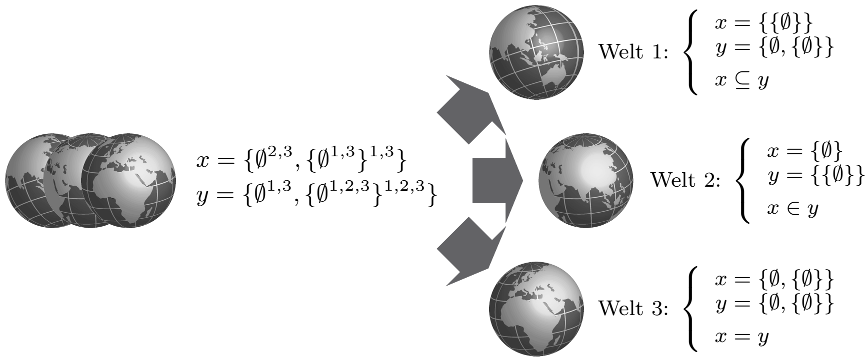


Abbildung 5.2: Welteninterpretation boolescher Mengen

Behalten Sie im Gedächtnis, dass es sich bei booleschen Mengen um gewöhnliche Funktionen in mengentheoretischer Darstellung handelt. In unserem konkreten Fall sind x und y Funktionen mit den Definitionsbereichen

$$\mathrm{dom}(x) = \{\emptyset, \{\emptyset^{1,3}\}\}$$
$$\mathrm{dom}(y) = \{\emptyset, \{\emptyset^{1,2,3}\}\}$$

und den Funktionswerten:

$$\begin{aligned} x(\emptyset) &= \{2,3\} \\ x(\{\emptyset^{1,3}\}) &= \{1,3\} \\ y(\emptyset) &= \{1,3\} \\ y(\{\emptyset^{1,2,3}\}) &= \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Immer dann, wenn das Denken in Welten hilfreich ist, werden wir es durch eine alternative Schreibweise unterstützen, die alle resultierenden Mengen zeilenweise auflistet und für die oben eingeführten Beispiele x und y folgendermaßen aussieht:

$$x = \begin{cases} ^1 : \{\{\emptyset\}\} \\ ^2 : \{\emptyset\} \\ ^3 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \end{cases} \qquad y = \begin{cases} ^1 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ ^2 : \{\{\emptyset\}\} \\ ^3 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \end{cases}$$

In dieser Darstellung lässt sich mit einem Blick erkennen, dass die Menge x in Welt 2 ein Element von y und in Welt 1 eine Teilmenge von y ist. In Welt 3 sind die beiden Mengen identisch, d. h., in dieser Welt ist sowohl x eine Teilmenge von y als auch y eine Teilmenge von x. Mithilfe der oben eingeführten Funktion $[\![\cdot]\!]$ können wir diese Zusammenhänge folgendermaßen beschreiben:

$$[\![x \in y]\!] = \{2\} \tag{5.1}$$

$$[\![x \subseteq y]\!] = \{1, 3\} \tag{5.2}$$

$$[\![x = y]\!] = \{3\} \tag{5.3}$$

Als Nächstes wollen wir versuchen, die Ausdrücke $[\![x \in y]\!]$, $[\![x \subseteq y]\!]$ und $[\![x = y]\!]$ formal zu definieren. Im Falle der Mengengleichheit ist dies nahezu trivial, da wir sie unmittelbar auf die Teilmengenbeziehung reduzieren können:

$$[\![x = y]\!] \;:=\; [\![x \subseteq y]\!] \wedge [\![y \subseteq x]\!] \tag{5.4}$$

Für die Element- und die Teilmengenbeziehung legen wir zunächst die Basisfälle fest. Ein solcher liegt vor, wenn x bzw. y die leere Menge ist:

$$\begin{aligned} [\![x \in \emptyset]\!] &= \emptyset \\ [\![\emptyset \subseteq y]\!] &= \{1, 2, 3\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für alle anderen Fälle hilft die folgende operative Überlegung weiter: Die Elementbeziehung $[\![x \in y]\!]$ lässt sich entscheiden, indem wir in allen Welten separat prüfen, ob dort ein Element $v \in y$ existiert, das mit x übereinstimmt. Die Menge aller Welten, in denen eine Menge v in y vorhanden ist, ist $y(v)$, und die Menge aller Welten, in denen v und x übereinstimmen, ist $[\![v = x]\!]$. Diese Überlegung führt uns auf direktem Weg zu der folgenden symbolischen Definition:

$$[\![x \in y]\!] \;:=\; \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(v) \wedge [\![v = x]\!] \Big) \tag{5.6}$$

Die Gleichheitsrelation, auf die in dieser Formel Bezug genommen wird, ist noch unvollständig definiert, da wir sie lediglich auf die noch gar nicht diskutierte Teilmengenbeziehung reduziert haben. Deren Definition lautet folgendermaßen:

$$[\![x \subseteq y]\!] \;:=\; \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \rightarrow [\![u \in y]\!] \Big) \tag{5.7}$$

Die Wahl dieser Formel basiert auf einer ähnlichen Überlegung wie eben: Die Aussage $x \subseteq y$ ist in einer Welt wahr, wenn alle Elemente u, die in dieser Welt in x vorhanden sind, in der gleichen Welt auch in y vorhanden sind.

Auf den ersten Blick mag diese Definition wie eine verbotene Selbstreferenz wirken, da wir die Elementbeziehung auf die Teilmengenbeziehung reduziert haben und die Teilmengenbeziehung auf die Elementbeziehung. Auf den zweiten Blick wird klar, dass es sich um eine gemeinsame induktive Definition handelt, da wir uns auf den rechten Seiten von (5.6) und (5.7) nur auf die Elemente von y bzw. x beziehen und damit aufgrund der Fundiertheit der $\in$-Relation immer irgendwann die Basisfälle erreichen.

Durch die geleistete Vorarbeit sind wir in der Lage, den Begriff der booleschen Menge weiter zu präzisieren. Hierfür setzen wir eine beliebige boolesche Algebra B als gegeben voraus und definieren darauf aufbauend das *boolesche Mengenuniversum* $\mathrm{V}^{(B)}$, das alle booleschen Mengen in einer Klasse vereint. $V^{(B)}$ ist das boolesche Pendant zum Mengenuniversum V, das wir in Abschnitt 2.5.2 besprochen haben.

Definition 5.1 Boolesches Mengenuniversum

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra. Das *boolesche Mengenuniversum* $V^{(B)}$ ist die Klasse:

$$V^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha^{(B)}$$

Die *booleschen Hierarchiestufen* $V_\alpha^{(B)}$ sind folgendermaßen definiert:

$$V_0^{(B)} := \emptyset \tag{5.8}$$

$$V_{\alpha+1}^{(B)} := \{f : A \to B \mid A \subseteq V_\alpha^{(B)}\} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathrm{Ord} \tag{5.9}$$

$$V_\alpha^{(B)} := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)} \quad \text{für alle Limes-Ordinalzahlen } \alpha \in \mathrm{Ord}$$

Mithilfe von $V^{(B)}$ können wir das boolesche Modell $\mathcal{M}^{(B)}$ definieren. Es entsteht aus dem postulierten Standardmodell $\mathcal{M}$ durch das Entfernen aller Elemente, die keine booleschen Mengen sind.

Definition 5.2 Boolesches Modell

Es sei $\mathcal{M}$ das postulierte Grundmodell von ZFC und $(B, \wedge, \vee) \in \mathcal{M}$ eine vollständige boolesche Algebra. Die Menge

$$\mathcal{M}^{(B)} := \mathcal{M} \cap V^{(B)}$$

ist das von $\mathcal{M}$ und B generierte *boolesche Modell* von ZFC.

In der gewählten Bezeichnung spiegelt sich schon jetzt das Hauptergebnis dieses Kapitels wider. Wir werden zeigen, dass es $\mathcal{M}^{(B)}$ tatsächlich verdient, ein Modell von ZFC genannt zu werden. Da wir es jetzt aber nicht mehr mit gewöhnlichen, sondern mit unscharfen Mengen zu tun haben, müssen wir diese Aussage noch präzisieren. Wir müssen klären, was die Modelleigenschaft in diesem Fall überhaupt bedeuten soll.

Bevor wir dies tun, wollen wir unser Augenmerk auf ein eher unscheinbares Detail in Definition 5.2 richten. Wir haben dort gefordert, dass die verwendete boolesche Algebra $(B, \wedge, \vee)$ nicht nur vollständig, sondern auch ein Element von $\mathcal{M}$ sein muss. Für die meisten Ergebnisse, die wir in diesem Kapitel erarbeiten, ist lediglich die Vollständigkeit von Bedeutung; danach wird die zweite Forderung aber immer wich-