4.6 Generische Filter

Es sei F ein Filter einer vollständigen booleschen Algebra $(B, \wedge, \vee)$ und A eine Teilmenge von B, die das Element $\bigwedge A$ enthält. Wir wissen, dass $\bigwedge A$ das Infimum der Menge A ist, d. h., alle in A enthaltenen Elemente sind größer oder gleich $\bigwedge A$. Nach (4.110) sind Filter nach oben abgeschlossen, sodass wir den folgenden Zusammenhang aufstellen können:

$$\bigwedge A \in F \;\Rightarrow\; A \subseteq F \tag{4.132}$$

Ist F ein endlicher Filter und die Menge A nicht leer, so gilt auch die Umkehrung. Dies folgt aus der Eigenschaft von Filtern, bezüglich ‚$\wedge$' abgeschlossen zu sein, sodass die konjunktive Verknüpfung aller in A enthaltenen Elemente selbst ein Element von F sein muss. Nach Lemma 4.12 ist dieses Element das Infimum von A.

Für unendliche Filter läuft diese Argumentation ins Leere. Wir können dann nicht mehr länger davon ausgehen, dass mit jeder nichtleeren Teilmenge von F auch das Infimum in F enthalten ist. Später werden wir aber genau diese Eigenschaft benötigen, und so bleibt uns nichts anderes übrig, als diese explizit einzufordern. Tun wir dies, so erreichen wir jene mathematischen Objekte, für die wir uns in diesem Abschnitt interessieren:

Definition 4.52 Generischer Filter

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra und $U \subset B$ ein Ultrafilter. U heißt *generisch*, wenn für jede nichtleere Menge A die folgende Beziehung gilt:

$$A \subseteq U \;\Leftrightarrow\; \bigwedge A \in U \tag{4.133}$$

Oder, in einer äquivalenten Formulierung:

$$A \cap U \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \bigvee A \in U \tag{4.134}$$

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, dass (4.133) und (4.134) auch wirklich äquivalente Aussagen sind:

1. Wir zeigen: Aus (4.133) folgt (4.134).

$$\begin{aligned} A \cap U = \emptyset &\overset{(4.124)}{\Leftrightarrow} \{\neg a \mid a \in A\} \subseteq U \\ &\overset{(4.133)}{\Leftrightarrow} \bigwedge \{\neg a \mid a \in A\} \in U \\ &\overset{(4.124)}{\Leftrightarrow} \neg \bigwedge \{\neg a \mid a \in A\} \notin U \\ &\overset{(4.77)}{\Leftrightarrow} \bigvee A \notin U \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: Aus (4.134) folgt (4.133).

$$\begin{aligned} A \subseteq U \;\; &\overset{(4.124)}{\Leftrightarrow} \{\neg a \mid a \in A\} \cap U = \emptyset \\ &\overset{(4.134)}{\Leftrightarrow} \bigvee \{\neg a \mid a \in A\} \notin U \\ &\overset{(4.124)}{\Leftrightarrow} \neg \bigvee \{\neg a \mid a \in A\} \in U \\ &\overset{(4.78)}{\Leftrightarrow} \bigwedge A \in U \end{aligned}$$

Vielleicht haben Sie sich die Frage gestellt, weshalb wir den Begriff der Generizität ausschließlich für Ultrafilter definiert haben. In der Tat ist diese Beschränkung hier nicht unmittelbar einsichtig, da die in (4.133) geforderte Abschlusseigenschaft in keinerlei Bezug zu den besonderen Eigenschaften eines Ultrafilters steht. Der Grund für diese selbst auferlegte Restriktion wird verständlich werden, sobald wir den Begriff des generischen Filters auf Halbordnungen übertragen. Wenden wir die Definition, die wir in diesem allgemeineren Kontext wählen, auf boolesche Algebren an, so sind die generischen Filter automatisch Ultrafilter.

4.6.1 Dichte Teilmengen

Die generischen Filter einer booleschen Algebra $(B, \wedge, \vee)$ lassen sich auf verschiedene Weisen charakterisieren. Eine für uns zweckmäßige basiert auf dem Begriff der *dichten Teilmenge*, der folgendermaßen definiert ist:

Definition 4.53 Dichte Teilmenge einer booleschen Algebra

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra. Eine Menge $D \subseteq B \backslash \{0\}$ heißt dicht in $(B, \wedge, \vee)$, wenn sie die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\text{Für alle } b \in B \backslash \{0\} \text{ existiert ein } d \in D \text{ mit } d \leq b. \tag{4.135}$$

Geht aus dem Kontext hervor, dass eine Menge B zu einer booleschen Algebra $(B, \wedge, \vee)$ gehört, so sprechen wir kürzer von einer Menge D, die dicht in B liegt. Ist auch B aus dem Kontext heraus ersichtlich, so sprechen wir manchmal schlicht von einer dichten Teilmenge.

Eine dichte Teilmenge können wir uns als eine Menge vorstellen, die so reichhaltig ist, dass für jedes Element $b \in B$ das Element selbst oder ein kleineres darin enthalten ist, und die Forderung $D \subseteq B \backslash \{0\}$ stellt sicher, dass dieses kleinere Element niemals das Nullelement ist.

Bevor wir fortfahren, wollen wir eine Reihe von Beispielen ansehen:

Lemma 4.54

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra und $A \subseteq B$. Dann ist die Menge

$$D := D_1 \cup D_2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} D_1 := \{d \in B\backslash\{0\} \mid d \leq a \text{ für alle } a \in A\} \\ D_2 := \{d \in B\backslash\{0\} \mid d \leq \neg a \text{ für ein } a \in A\} \end{cases}$$

dicht in B.

Beweis: Sei b ein beliebiges Element aus $B\backslash\{0\}$. Für dieses Element gilt:

$$b \leq a \text{ für alle } a \in A \text{ oder}$$
$$b \not\leq a \text{ für ein } a \in A.$$

In beiden Fällen müssen wir zeigen, dass ein Element $d \in D$ mit $d \leq b$ existiert. Im ersten Fall ist b in D_1 enthalten, sodass wir für d das Element b wählen können. Im zweiten Fall folgt aus Lemma 4.29 die Existenz eines Elements $d \in B\backslash\{0\}$ mit $d \leq b$ und $d \perp a$, was nach (4.266) das Gleiche ist wie $d \leq b$ und $d \leq \neg a$. Also ist d ein Element von D_2 und somit auch von D. □

Korollar 4.55

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra und $a \in B$. Dann ist die Menge

$$D_a := \{d \in B\backslash\{0\} \mid d \leq a \text{ oder } d \leq \neg a\} \tag{4.136}$$

dicht in B.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemma 4.54 mit $A := \{a\}$. □

Im Folgenden werden wir auch von Mengen sprechen, die unter einem gewissen Element $p \in B$ dicht sind. Damit sind Mengen gemeint, die anstatt (4.135) die folgende abgeschwächte Beziehung erfüllen:

$$\text{Für alle } b \in B\backslash\{0\} \text{ mit } b \leq p \text{ existiert ein } d \in D \text{ mit } d \leq b.$$

In diesem erweitere Begriffsgerüst fügen sich die in Definition 4.53 festgelegten Mengen als jene Mengen ein, die unter dem Element 1 dicht sind.

Bearbeiten Sie die Aufgaben 4.51, 4.52 und 4.53.

Weiter oben haben wir angedeutet, dass sich generische Filter durch eine besondere Schnitteigenschaft mit dichten Teilmengen charakterisieren lassen. Mit dem nächsten Lemma gehen wir den ersten Schritt, um die gemachte Andeutung zu präzisieren:

Lemma 4.56 Schnitteigenschaft generischer Filter

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra, $U \subset B$ ein generischer Filter und $u \in U$. Dann gilt:

$$D \subseteq B \backslash \{0\} \text{ ist dicht unter } u \ \Rightarrow\ U \cap D \neq \emptyset$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe eine unter u dichte Teilmenge $D \subseteq B\backslash\{0\}$, die mit U kein Element gemeinsam hat. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap D = \emptyset \ &\overset{(4.124)}{\Rightarrow} \{\neg d \mid d \in D\} \subseteq U \\ &\overset{(4.133)}{\Rightarrow} \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \in U \\ &\overset{(4.111)}{\Rightarrow} u \wedge \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \in U \\ &\overset{(4.59)}{\underset{(4.109)}{\Rightarrow}} 0 < u \wedge \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \leq u \end{aligned}$$

Da D dicht unter u ist, gibt es ein $a \in D$ mit:

$$0 < a \leq u \wedge \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \tag{4.137}$$

Für dieses Element a gilt:

$$\begin{aligned} a \in D &\Rightarrow \neg a \in \{\neg d \mid d \in D\} \\ &\overset{(4.68)}{\Rightarrow} \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \leq \neg a \\ &\overset{(4.55)}{\Rightarrow} u \wedge \bigwedge \{\neg d \mid d \in D\} \leq u \wedge \neg a \end{aligned} \tag{4.138}$$

Aus (4.137) und (4.138) ergibt sich $a \leq u \wedge \neg a$. Mit (4.42) folgt daraus

$$a = a \wedge (u \wedge \neg a) = 0,$$

im Widerspruch zu $0 < a$. □

Für $u = 1$ besagt Lemma 4.56, dass ein generischer Filter mit jeder dichten Teilmenge von B einen nichtleeren Schnitt aufweist. Das nächste Lemma zeigt, dass sich diese Schlussrichtung auch umkehren lässt. Hat ein Filter mit jeder dichten Teilmenge mindestens ein Element gemeinsam, so muss er ein generischer Filter sein.

Lemma 4.57 Schnittcharakterisierung generischer Filter

Es sei $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra. Ein Filter $U \subset B$ ist genau dann ein generischer Filter, wenn er mit jeder dichten Teilmenge $D \subseteq B \backslash \{0\}$ mindestens ein Element gemeinsam hat, wenn also gilt:

$$U \cap D \neq \emptyset \text{ für alle dichten Teilmengen } D \subseteq B \backslash \{0\} \tag{4.139}$$

Beweis: Die Richtung von links nach rechts ist die Aussage von Lemma 4.56 für den Fall $u = 1$. Die Richtung von rechts nach links zeigen wir in zwei Teilen:

1. Wir zeigen: Ein Filter, der (4.139) erfüllt, erfüllt auch (4.133).

   Aufgrund von (4.132) müssen wir nur noch die folgende Richtung zeigen:

   $$A \subseteq U \;\Rightarrow\; \bigwedge A \in U$$

   Dies gelingt, indem wir die Existenz eines Elements $b \in U$ mit

   $$b \leq a \quad \text{für alle } a \in A \tag{4.140}$$

   nachweisen. Aus (4.70) folgt dann $b \leq \bigwedge A$ und daraus wiederum $\bigwedge A \in U$.

   Um ein passendes b zu finden, wählen wir für D die Menge $D = D_1 \cup D_2$ aus Lemma 4.54. Aus der Dichtheit dieser Menge folgt $U \cap D \neq \emptyset$, d. h., es existiert ein Element b mit $b \in U$ und $b \in D$. b kann kein Element von D_2 sein, sonst hätten wir $b \leq \neg a$ für ein $a \in A \subseteq U$. Dann wäre $\neg b \geq a$ für ein $a \in U$ und somit auch $\neg b \in U$, im Widerspruch zu $b \in U$. Das bedeutet $b \in D_1$, und dies liefert uns (4.140).

2. Wir zeigen: Ein Filter, der (4.139) erfüllt, ist ein Ultrafilter.

   Wir wählen für D die in Korollar 4.55 als dicht erkannte Menge D_a. Aus der Dichtheit dieser Menge folgt $U \cap D_a \neq \emptyset$, d. h., für jedes $a \in B$ existiert ein Element $b \in U$ mit $b \leq a$ oder $b \leq \neg a$. Aus (4.110) folgt im ersten Fall $a \in U$ und im zweiten Fall $\neg a \in U$.

□

In den meisten Darstellungen der Forcing-Technik wird ein generischer Filter über die in Lemma 4.57 formulierte Schnitteigenschaft definiert und die Abschlusseigenschaft (4.133), die wir weiter oben als das begriffsbestimmende Merkmal festgelegt haben, als Theorem bewiesen. Ich habe mich gegen diesen anerkannten Weg entschieden, da die Schnittcharakterisierung den Blick darauf verstellt, was die generischen Filter gegenüber den nicht generischen Filtern wirklich auszeichnet. Dennoch gibt es einen Grund, warum die meisten Darstellungen die Definition über die Schnitteigenschaft bevorzugen. Der Begriff des generischen Filters ist nämlich nicht nur für boolesche Algebren, sondern auch für Halbordnungen definiert, und in diesem allgemeineren Kontext können wir natürlich nicht auf die speziellen Eigenschaften von vollständigen booleschen Algebren zurückgreifen. In Definition 4.52 haben wir dies durch die Bildung des Elements $\bigwedge A$ aber ausdrücklich getan.

In den folgenden Kapiteln werden wir auch den Begriff des $\mathcal{M}$-generischen Filters verwenden. Ein solcher Filter muss die Eigenschaft (4.133) nur noch für solche Mengen A erfüllen, die in $\mathcal{M}$ vorhanden sind. Jeder generische Filter ist somit immer auch $\mathcal{M}$-generisch, aber nicht umgekehrt.

Bearbeiten Sie Aufgabe 4.54.

Dass wir für die Konstruktion unserer Modellerweiterungen auf die Hilfe von generischen Filtern angewiesen sind, haben wir weiter oben bereits erwähnt. Unweigerlich drängt sich damit die Frage nach deren Existenz in den Vordergrund. Können wir darauf vertrauen, unter den Ultrafiltern einer booleschen Algebra immer auch solche zu finden, die generisch sind? Im nächsten Abschnitt werden wir mit dem Existenzlemma von Rasiowa-Sikorski eine Antwort auf diese Frage geben.

4.6.2 Existenzlemma von Rasiowa-Sikorski

In seiner allgemeinen Form macht das Existenzlemma von Rasiowa-Sikorski eine Aussage über Halbordnungen. Für uns ist dies die passende Gelegenheit, um den Begriff des Filters, den wir bisher nur im Kontext von booleschen Algebren verwendet haben, auf beliebige Halbordnungen auszuweiten.

Definition 4.58 Filter einer Halbordnung

Es sei $(P, \leq)$ eine Halbordnung. Ein *Filter* ist eine nichtleere Teilmenge $F \subseteq P$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$a \in F \text{ und } b \in P \text{ mit } b \geq a \;\Rightarrow\; b \in F \tag{4.141}$$

$$a \in F \text{ und } b \in F \;\Rightarrow\; c \leq a \text{ und } c \leq b \text{ für ein } c \in F \tag{4.142}$$