

1 Einleitung

„Die Attribute des Gleichen, des Größeren und des Kleineren haben nicht statt bei Unendlichem, sondern sie gelten nur bei endlichen Größen.“

Galileo Galilei, zitiert nach [24]

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“

David Hilbert [26]

Das Unendliche hat die Menschen zeitlebens fasziniert und wie kaum ein anderes geistiges Konstrukt die Entwicklung der Philosophie, der Physik und der Mathematik geprägt. Insbesondere die Mathematik wäre in ihrer modernen Form undenkbar, hätte es die Idee des unendlich Großen oder die Idee des unendlich Kleinen, des Infinitesimalen, nicht gegeben. Tatsächlich gehen wir heute so unbeschwert und selbstverständlich mit dem Unendlichen um, dass oftmals in Vergessenheit gerät, wie erbittert um diesen Begriff in der Vergangenheit gestritten wurde.

1.1 Das mathematisch Unendliche

Tatsächlich war der Umgang mit unendlichen Größen nicht immer so freizügig wie wir ihn heute in der Mathematik erleben. Bis in das späte 19. Jahrhundert hinein akzeptierten viele Mathematiker das Unendliche lediglich in Form nicht endender Prozesse, zu denen beispielsweise das Aufzählen der natürlichen Zahlen gehört. Im Rahmen eines solchen Prozesses können wir eine Größe erschaffen, die zwar über alle Grenzen hinaus wächst, aber trotzdem zu jeder Zeit einen endlichen Umfang aufweist. Diesem *Potential-Unendlichen* steht das *Aktual-Unendliche* gegenüber. Zu ihm dringen wir vor, wenn wir solche mathematischen Objekte im Geiste zu einem abgeschlossenen Ganzen vereinen, die sich, plakativ gesprochen, nicht zu Ende zählen lassen. Sprechen wir beispielsweise von der Menge der natürlichen Zahlen, so haben wir diesen Schritt bereits vollzogen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen dann als ein eigenes, in sich abgeschlossenes Gebilde oder, in den Worten der damaligen Zeit,

als „*ein in sich festes, konstantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum*“ [8].

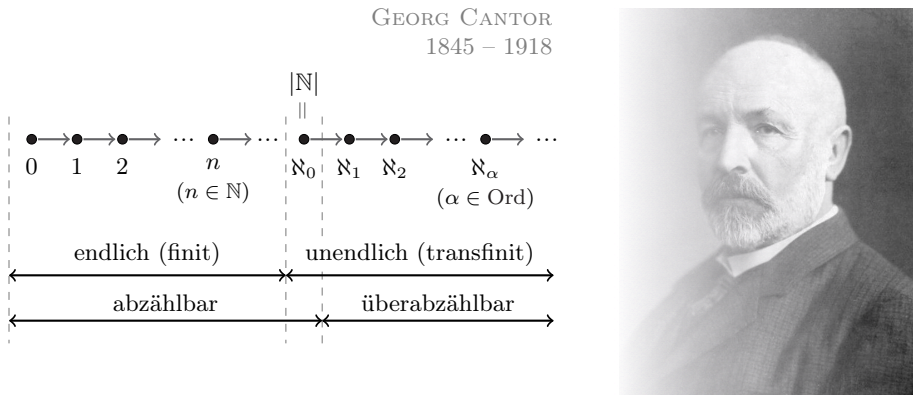
Ein überzeugender Beleg dafür, wie skeptisch die Mathematiker der damaligen Zeit das Aktual-Unendliche beurteilten, ist das berühmte Zitat von Carl Friedrich Gauß: „*So protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welches in der Mathematik niemals erlaubt ist*“ [19]. Dass selbst einer unserer begnadetsten Mathematiker einen so großen Abstand hielt, kam natürlich nicht von ungefähr. Schon im antiken Griechenland war bekannt, dass der unbedarfte Umgang mit unendlichen Größen zu Paradoxien führt, die selbst auf den zweiten Blick nur schwierig aufzulösen sind.

Dass wir unendlichen Größen heute so unbefangen entgegentreten, verdanken wir einem Mann, der von sich selber sagte, er wäre lieber Violist geworden. Die Rede ist von Georg Cantor, den Edmund Landau zu den „*größten und genialsten Mathematikern aller Länder und aller Zeiten*“ zählte [33]. Anders als Gauß viele Jahre zuvor, schreckte Cantor nicht davor zurück, die natürlichen Zahlen als ein in sich vollendetes Ganzes zu betrachten, als eine *Mannigfaltigkeit* wie er sie nannte. Tatsächlich waren Cantors Mannigfaltigkeiten, heute würden wir schlicht Mengen dazu sagen, nur ein Mittel zum Zweck, um eine Frage nach der Eindeutigkeit gewisser trigonometrischer Reihen zu beantworten. Im Rahmen dieser Arbeit ging Cantor von einer vorgegebenen Punktmenge zu der Menge ihrer Häufungspunkte über und bezeichnete das Ergebnis als deren Ableitung. Diesen Ableitungsprozess führte er wieder und wieder durch und fasste anschließend alle endlichen Ableitungen zu einer gemeinsamen Menge zusammen. Auch diese Menge ließ sich ableiten, und so war er in der Lage, diesen Bildungsprozess im Transfiniten nach dem gleichen Schema fortzusetzen. Cantor hatte einen Weg gefunden, systematisch über das Unendliche hinaus zu zählen, und damit jenes Konstruktionsprinzip entdeckt, das auch der Ordinalzahlreihe zugrunde liegt. Was es mit dieser Reihe im Detail auf sich hat, werden wir ausführlich in Kapitel 2 erarbeiten.

Viele Mathematiker der damaligen Zeit empfanden diese Mengenkonstruktionen als so abenteuerlich, dass sie diese als absurd zurückwiesen und Cantor auch persönlich in die Defensive drängten. Den zahlreichen Widerständen zum Trotz blieb Cantor seiner Linie treu, und wir können ihm heute kaum dankbarer sein. Seine Arbeit hat zu einer tiefgreifenden begrifflichen Neuorientierung in der Mathematik geführt, die sich ohne sein beharrliches Zutun wahrscheinlich erst viele Jahre später vollzogen hätte.

1.1.1 Die Kardinalzahlreihe

Den Stein ins Rollen brachte Cantor mit einer Entdeckung, die er gegen Ende des Jahres 1873 machte. Er fand heraus, dass sich jenseits des Endlichen, im Transfiniten,



„Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des [...] Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist [...] Es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Überzeugung aussprechen, daß diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche angesehen werden müsse. Dabei verhehle ich mir keineswegs, dass ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weit verbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle.“ [5]

Abbildung 1.1: Die Vermessung der (Mengen-)Welt: Cantors Kardinalzahlreihe

eine völlig neue Welt auftat, eine Welt, in der sich verschieden große Unendlichkeiten entlang einer nicht endenden Stufenleiter hierarchisch übereinander schichteten. Es waren zwei wesentliche Aspekte, die Cantor zu diesem bahnbrechenden Erfolg verhalfen. Zum einen war es sein exakt formuliertes Begriffsgerüst, das viel genauer war als jene, mit denen sich die Philosophen und Naturforscher in der Vergangenheit daran versuchten, die Unendlichkeit zu entmystifizieren. Mit ihm war Cantor in der Lage, das Transfinite, das sich in einer völlig ungeahnten Vielfalt präsentierte, mit mathematischer Schärfe zu analysieren. Zum anderen war es schlicht und einfach sein hohes mathematisches Talent. Ohne dieses wäre es ihm nicht möglich gewesen, so weit in diese neue Welt vorzustoßen, wie es ihm im Laufe seines Lebens, oftmals im Alleingang, gelungen war.

Um eine Menge ihrer Größe nach zu vermessen, benötigte Cantor ein Maß für die Anzahl ihrer Elemente. Diese Maßzahl heißt die *Mächtigkeit* oder die *Kardinalität* einer Menge. Symbolisch wird die Kardinalität einer Menge x mit $|x|$ bezeichnet und entspricht für endliche Mengen schlicht der Anzahl der in x enthaltenen Elemente. Folgerichtig ist jede natürliche Zahl auch eine Kardinalzahl. Cantor erkannte im Laufe seiner Untersuchungen, dass solche Maßzahlen auch für unendliche Mengen existieren, und führte für deren Niederschrift den hebräischen Buchstaben Aleph (\aleph) ein. Die Mächtigkeit der kleinsten Unendlichkeit wird mit der *Kardinalzahl* \aleph_0 bezeichnet, die nächstgrößere mit der Kardinalzahl \aleph_1 und so fort (Abbildung 1.1).

Cantors *Aleph-Reihe* weist die faszinierende Eigenschaft auf, dass wir ihre Elemente nicht vollständig mithilfe der natürlichen Zahlen erfassen können, d. h., die natürlichen Zahlen reichen als Indizes nicht aus, um alle Kardinalzahlen in der Form \aleph_n benennen zu können. Dies gelingt erst, wenn wir sämtliche Ordinalzahlen als Indizes zulassen. Das bedeutet unter anderem, dass eine Kardinalzahl \aleph_ω mit der Eigenschaft existiert, größer zu sein als alle Kardinalzahlen der Form \aleph_n mit $n \in \mathbb{N}$. Dennoch sind die Kardinalzahlen feinsäuberlich abgestuft, sodass wir von jeder Unendlichkeit zu einer eindeutig bestimmten, nächstgrößeren vordringen können. In Kapitel 2 werden sie sehen, dass sich die Kardinalzahlen, die Cantor zu Beginn seiner Untersuchungen noch als eigenständige, losgelöste mathematische Objekte betrachtete, nahtlos in die neu erschaffene Mengenwelt einfügen. Wir werden sie dort durch spezielle Ordinalzahlen repräsentierten, was nichts anderes bedeutet, als dass sie Elemente der gleichen Reihe sind, die wir für ihrer Indizierung, d. h. für die Angabe ihrer Position innerhalb der Aleph-Reihe, verwenden. Dieses auf den ersten Blick merkwürdig anmutende Ergebnis ist nur eines von vielen Überraschungen, die das Transfinite für uns bereithält.

Zu Beginn, als Cantor die Aleph-Reihe in der eben skizzierten Form noch gar nicht kannte, beschäftigte er sich damit, die Größen von unendlichen Mengen gegeneinander in Bezug zu setzen. Es ging also nicht darum, die Größe einer Menge in einem absoluten Sinn zu quantifizieren, sondern um die Frage, ob zwei vorgelegte Mengen gleichmächtig waren oder eine davon „weniger“ Elemente enthielt als die andere. Da die Größe einer unendlichen Menge nicht wie im endlichen Fall durch das Durchzählen der Elemente bestimmt werden kann, knüpfte Cantor die Größenbeziehungen zwischen zwei Mengen an die Existenz gewisser Abbildungen. Ist es beispielsweise möglich, die Elemente einer Menge x eineindeutig in eine Menge y einzubetten, existiert also eine injektive Abbildung von x nach y , so ist dies gleichbedeutend mit der Aussage, x enthalte höchstens so viele Elemente wie y . Dies ist das Gleiche wie die Aussage, die Kardinalität von x sei höchstens so groß wie die Kardinalität von y , in Zeichen $|x| \leq |y|$. Ist eine solche Einbettung auch in die andere Richtung möglich, existiert also eine bijektive Abbildung zwischen x und y , so sind x und y gleichmächtig, in Zeichen $|x| = |y|$.

Es dauerte nicht lange, bis Cantor auf eine Reihe merkwürdiger Phänomene stieß. Zum Beispiel weisen die natürlichen Zahlen die Eigenschaft auf, sich bijektiv auf

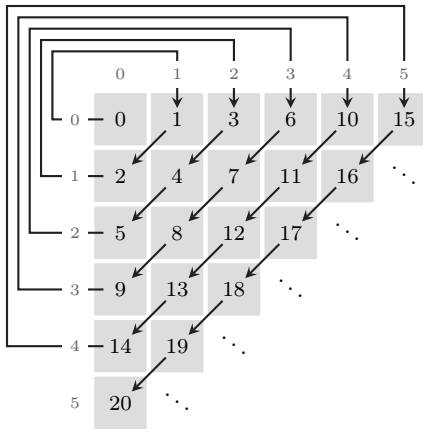


Abbildung 1.2

Bijektion zwischen \mathbb{N}^2 und \mathbb{N}

jede ihrer unendlichen Teilmengen abbilden zu lassen. Es spielt also keine Rolle, ob wir die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen, die Menge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ der positiven Zahlen, die Menge der geraden Zahlen oder irgendeine andere unendliche Teilmenge betrachten: Die Kardinalität ist stets dieselbe.



Bearbeiten Sie Aufgabe 1.1.

Hieraus ergibt sich, dass es keine unendliche Menge geben kann, die im Sinne des Cantor'schen Begriffsgerüsts kleiner ist als die natürlichen Zahlen. Mit der oben eingeführten Aleph-Notation lässt sich dieser Zusammenhang folgendermaßen aufschreiben:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Damit ist der Anfang der Aleph-Reihe geklärt. Sie beginnt mit der Kardinalität der natürlichen Zahlen.

Ein ähnliches Phänomen konnte Cantor auch für Mengen beobachten, die augenscheinlich größer waren als die natürlichen Zahlen. Hierzu gehörte die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen, genauso wie die Menge \mathbb{N}^2 , die alle Paare umfasst, die mit den natürlichen Zahlen gebildet werden können. Abbildung 1.2 zeigt, wie eine bijektive Abbildung von \mathbb{N}^2 nach \mathbb{N} konstruiert werden kann. Die Elemente von \mathbb{N}^2 sind in einer Matrix angeordnet, die sich unendlich weit nach rechts und nach unten ausbreitet, und die eingezeichneten Pfeile machen deutlich, wie wir jedem Tupel (x, y) eine eindeutige natürliche Zahl $f(x, y)$ zuordnen können. Mit dem gleichen Argument können wir zeigen, dass die Mengen \mathbb{N}^3 und \mathbb{N} gleichmächtig sind. Wir erhalten eine entsprechende Bijektion, indem wir die Funktion f über die Vorschrift $f(f(x, y), z)$ mit sich selbst verketten. Dies spielt uns ein faszinierendes Ergebnis in die Hände: Der n -

Hochgeehrter Herr College!

Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es, und sind so gut, mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus diskreten Teilen, (x) aber bildet ein Kontinuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist es ein sehr einfacher.

Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich (n) nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe $(\frac{p}{q})$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$? Und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich (n) nicht nur diesem Inbegriffe, sondern noch dem allgemeineren $(a_{n_1}, n_2, \dots, n_\nu)$ eindeutig zuordnen lässt, wo n_1, n_2, \dots, n_ν unbeschränkte positive ganzzahlige Indizes in beliebiger Zahl ν sind.

Mit bestem Gruße
Ihr ergebenster
G. Cantor.

Abbildung 1.3: Cantors Brief vom 29.11.1873 an Richard Dedekind

dimensionale Zahlenraum \mathbb{N}^n hat stets die gleiche Mächtigkeit wie die Menge \mathbb{N} , egal in welcher schwindelerregende Höhe wir die Dimension n auch schrauben.



Bearbeiten Sie Aufgabe 1.2 und Aufgabe 1.3.

Gegen Ende des Jahres 1873 beschäftigte sich Cantor mit der Frage, ob sich auch die reellen Zahlen bijektiv auf die natürlichen Zahlen abbilden lassen. Cantor vermutete, die Antwort sei negativ, schließlich waren die reellen Zahlen etwas Kontinuierliches und damit völlig anders als die natürlichen Zahlen, die einen durch und durch diskreten Charakter zeigten. Beweisen konnte er seine Vermutung zu diesem Zeitpunkt aber noch nicht. Um eine Klärung herbeizuführen, schrieb Cantor an Richard Dedekind, den er ein Jahre zuvor bei einer Reise in die Schweiz kennengelernt hatte (Abbildung 1.3). Mit diesem Brief begann ein reger Gedankenaustausch zwischen den beiden Mathematikern, und es ist nicht übertrieben, diese Korrespondenz als ein wissenschaftshistorisches Juwel zu bezeichnen. Zum einen gibt der Briefwechsel einen

$f(0) = \dots,$	6	2	8	4	9	3	...	Abbildung 1.4 Cantors Diagonalkonstruktion
$f(1) = \dots,$	2	3	5	1	7	0	...	
$f(2) = \dots,$	2	6	9	4	5	4	...	
$f(3) = \dots,$	5	5	0	1	5	3	...	
$f(4) = \dots,$	3	3	1	8	5	2	...	
$f(5) = \dots,$	8	3	6	2	0	0	...	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
	6	3	9	1	5	0	...	
	$\downarrow -1$	$\downarrow +1$	$\downarrow -1$	$\downarrow +1$	$\downarrow -1$	$\downarrow +1$		
$f(n) \neq$	0	5	4	8	2	4	1	...

tiefen Einblick in die Denkweise Cantors. Zum anderen lässt er für einen kurzen Moment jene aufregende Zeit vor unserem geistigen Auge auferstehen, in der die moderne Mengenlehre ihre ersten Konturen ausbildete.

Wenige Tage später schaffte es Cantor tatsächlich, die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu zeigen. Dass sein Beweis, der auf dem Prinzip der Intervallschachtelung und einem trickreichen Widerspruchsargument beruht, in der Literatur vergleichsweise selten erwähnt wird, geht auf Cantor selbst zurück, denn drei Jahre später war es ihm gelungen, seinen alten Beweis mit einem verblüffend einfachen Argument überflüssig zu machen. Die Rede ist von Cantors berühmten *Diagonalisierungsargument*, das sich folgendermaßen zusammenfassen lässt: Wären die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{R} gleichmächtig, so würde eine Abbildung f von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen mit der Eigenschaft existieren, dass jede reelle Zahl ein Urbild hat. Listen wir die Nachkommaanteile der Funktionswerte

$$f(0), f(1), f(2), \dots$$

von oben nach unten auf, wie es in Abbildung 1.4 ausschnittsweise dargestellt ist, dann müsste jede reelle Zahl in irgendeiner Zeile auftauchen. Unabhängig von der gewählten Zuordnung sind wir aber immer im Stande, eine reelle Zahl zu konstruieren, die nicht in der Tabelle vorkommt. Diese können wir erzeugen, indem wir einen beliebigen Vorkommaanteil wählen und den Nachkommaanteil durch *Diagonalisierung* erzeugen. Dies bedeutet bildlich, dass wir uns von links oben nach rechts unten durch die Tabelle bewegen und jede auf der Hauptdiagonalen vorgefundene Nachkommaziffer modifizieren. Als Ergebnis erhalten wir die Ziffernfolge der sogenannten *Diagonalszahl*, die sich von $f(i)$ an der Nachkommastelle $i + 1$ unterscheidet und deshalb nicht selbst in der Tabelle vorkommen kann.



Bearbeiten Sie Aufgabe 1.4 und Aufgabe 1.5.

1.1.2 Die Kontinuumshypothese

In einer verallgemeinerten Form lässt sich mit Cantors Diagonalargument ein Satz beweisen, der heute als der *Satz von Cantor* bezeichnet wird. Er besagt, dass die Potenzmenge einer Menge x mächtiger ist als x selbst, durch die Bildung der Potenzmenge also stets eine größere Unendlichkeit erreicht wird. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ist ein Spezialfall dieser Beziehung. Wir erhalten sie, wenn wir für x die Menge der natürlichen Zahlen einsetzen und berücksichtigen, dass zwischen den reellen Zahlen und der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Bijektion besteht.



Bearbeiten Sie Aufgabe 1.6.

Aus dem Satz von Cantor folgt, dass die Aleph-Reihe nach oben unbeschränkt ist; ausgehend von einer beliebigen Menge können wir durch die Bildung der Potenzmenge stets zu einer neuen, größeren Kardinalität gelangen. Dies wirft die Frage auf, ob uns die Bildung der Potenzmenge in der Aleph-Reihe genau um eine Position vorrücken oder gewisse Unendlichkeiten überspringen lässt. Die Annahme, dass die Bildung der Potenzmenge immer direkt zur nächstgrößeren Unendlichkeit führt, ist die *allgemeine Kontinuumshypothese*. Zu Beginn seiner Untersuchungen hatte sie Cantor noch nicht in dieser Allgemeinheit formuliert, sondern nur für den Übergang von den natürlichen zu den reellen Zahlen, was nach dem oben Gesagten das Gleiche ist wie der Übergang von \mathbb{N} zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Cantor vermutete also, dass die Kardinalität der reellen Zahlen in der Aleph-Reihe direkt auf die Kardinalität der natürlichen Zahlen folgt, sich also keine andere Unendlichkeit dazwischen befindet. Die auf \aleph_0 folgende Kardinalzahl ist \aleph_1 , sodass wir seine Hypothese in die folgende symbolische Form bringen können:

Vermutung 1.1

Kontinuumshypothese

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1$$

Die Menge der reellen Zahlen hat die gleiche Kardinalität wie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bezeichnen wir die Kardinalität von $\mathcal{P}(x)$ wie üblich mit $2^{|x|}$, so ist

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}, \quad (1.1)$$

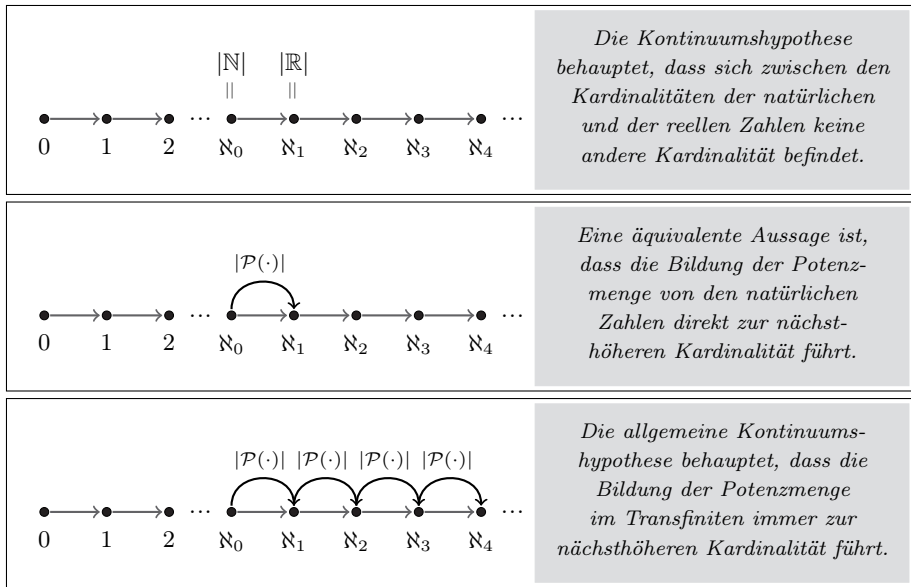


Abbildung 1.5: Spezielle und allgemeine Kontinuumshypothese

womit wir Cantors Kontinuumshypothese in die folgende äquivalente Form bringen können:

Vermutung 1.2 Kontinuumshypothese (alternative Formulierung)

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Hieraus erhalten wir mit wenig Mühe die symbolische Form der allgemeinen Kontinuumshypothese, die weiter oben bereits umgangssprachlich eingeführt wurde:

Vermutung 1.3 Allgemeine Kontinuumshypothese

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

Abbildung 1.5 fasst die verschiedenen Charakterisierungen der Kontinuumshypothese in einer Übersicht zusammen.

Im Laufe seines Lebens hatte Cantor wiederholt versucht, eine Klärung der Kontinuumshypothese herbeizuführen, scheiterte daran aber jedes Mal. Mehrfach glaubte er, die Frage positiv oder negativ beantwortet zu haben, einer genauen Prüfung hielt aber keiner seiner Beweise stand. So harmlos die Kontinuumshypothese auch wirkte: Sie schien sich seinem Zugriff zu entziehen. In das Rampenlicht wurde Cantors Vermutung im Jahr 1900 gerückt, als sie der deutsche Mathematiker David Hilbert in seine Liste ungelöster mathematischer Probleme aufnahm und auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongress in Paris einer breiten Öffentlichkeit vorstellte. In Hilberts Liste rangiert sie an oberster Stelle.

Von nun an galt die Kontinuumshypothese als eines der dringlichsten Probleme, der die Mathematiker zu Beginn des neuen Jahrhunderts gegenüberstanden. Wie die meisten seiner Zeitgenossen war auch Hilbert davon überzeugt, dass jede mathematische Frage einer Klärung fähig und es nur eine Frage der Geduld sei, bis die Kontinuumshypothese bewiesen oder widerlegt werden könne. Doch es kam anders.

Mittlerweile wissen wir, dass weder Cantor noch irgendein anderer Mathematiker eine Chance hatten, die Kontinuumshypothese zu entscheiden: Sie lässt sich mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik weder beweisen noch widerlegen. Um im Detail zu verstehen, was sich hinter dieser Aussage verbirgt, müssen wir zwei Fragen klären: Was genau ist ein Beweis und was sind die Mittel der gewöhnlichen Mathematik? Die Antworten auf diese Fragen sind Gegenstand zweier mathematischer Disziplinen, die zu der Zeit, als Cantor seine Hypothese zu lösen versuchte, noch gar nicht entwickelt waren: die Beweistheorie und die axiomatische Mengenlehre.

Die Beweistheorie beschäftigt sich mit dem Entwurf und den Eigenschaften von *formalen Systemen*. In groben Zügen wurden solche Systeme, die auch als *Logikkalküle* bezeichnet werden, bereits von Gottfried Wilhelm Leibniz beschrieben. Einzug in die Mathematik hielten sie aber erst im 19. Jahrhundert durch wegweisende Beiträge von Gottlob Frege, Bertrand Russell und David Hilbert. Formale Systeme basieren auf der Idee, logische Beziehungen in einer Kunstsprache zu formulieren, die nach präzise definierten Regeln aufgebaut ist. In ihrer modernen Form, die in einem hohen Maß durch die Hilbert'sche Schule geprägt ist, sind Logikkalküle so weit formalisiert, dass sich die Herleitung eines Theorems auf eine inhaltsleere Manipulation von Zeichenketten reduziert (Abbildung 1.6). Das bekannteste formale System in diesem Zusammenhang ist die Prädikatenlogik, die uns in diesem Buch auf Schritt und Tritt begleiten wird.

In der Prädikatenlogik wird der Begriff des Beweises zu einem scharf konturierten Objekt, das selbst einer mathematischen Analyse fähig ist. Damit wird die Frage nach der Beweisbarkeit einer Aussage zu einer mathematischen, nämlich jener, ob eine gewisse Formel φ durch die Anwendung der vorhandenen Schlussregeln in endlich vielen Schritten aus einer Menge vorgegebener Axiome hergeleitet werden kann. Ist eine Formel in diesem Sinne beweisbar, so drücken wir dies symbolisch über die Schreibweise $\vdash \varphi$ aus. Entsprechend bedeutet $\not\vdash \varphi$, dass die Formel φ innerhalb des betrachteten formalen Systems unbeweisbar ist. Aus Gründen der Verständlichkeit werden wir das

DAVID HILBERT
1862 – 1943



1. $\{\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash_{\text{PL1}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$
2. $\{\forall x \varphi(x)\} \vdash_{\text{PL1}} \forall x \varphi(x)$
3. $\vdash_{\text{PL1}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (A4)
4. $\{\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash_{\text{PL1}} \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ (MP, 1,3)
5. $\vdash_{\text{PL1}} \forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$ (A4)
6. $\{\forall x \varphi(x)\} \vdash_{\text{PL1}} \varphi(x)$ (MP, 2,5)
7. $\{\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\text{PL1}} \psi(x)$ (MP, 4,6)
8. $\{\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\text{PL1}} \forall x \psi(x)$ (G, 7)
9. $\{\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash_{\text{PL1}} \forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$ (DT)
10. $\vdash_{\text{PL1}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))$ (DT)

„Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. [...] Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss; er besteht aus Schlüssen [...] wo jedesmal jede der Prämissen [...] entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweis vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“ [25]

Abbildung 1.6: Ein formaler Beweis im Sinne der modernen mathematischen Logik

Zeichen ‚ \vdash ‘ in der Regel um den Namen des formalen Systems ergänzen, auf das es sich bezieht. So bedeutet $\vdash_{\text{PL0}} \varphi$, dass die Formel φ im aussagenlogischen Kalkül bewiesen werden kann, und $\vdash_{\text{PL1}} \varphi$, dass ein Beweis im Kalkül der Prädikatenlogik erster Stufe möglich ist. Auch die anderen Begriffe, die wir weiter oben umgangssprachlich verwendet haben, bekommen im Kontext der formalen Systeme eine präzise Bedeutung. Wenn wir beispielsweise sagen, eine Formel φ sei innerhalb der Prädikatenlogik erster Stufe widerlegbar, so meinen wir damit, dass die Negation von φ , die Formel $\neg\varphi$, beweisbar ist. Das Gleiche gilt für die Aussage, eine Formel φ sei unentscheidbar. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus den Axiomen hergeleitet werden können. Mit anderen Worten: Es gilt weder $\vdash \varphi$ noch $\vdash \neg\varphi$.

Um über Aussagen wie die Kontinuumshypothese innerhalb eines formalen Systems sprechen zu können, müssen wir aber noch mehr leisten. Formale Systeme wie die Prädikatenlogik stellen uns lediglich den logischen Schlussapparat zur Verfügung, bringen aber keinerlei Wissen über den Begriff der Menge mit. Um Aussagen über Mengen zu beweisen, und die Kontinuumshypothese ist nicht anderes als eine solche, müssen wir das formale System um dieses Wissen anreichern. Dies geschieht über sogenannte *Theorieaxiome*, die den vorhandenen *Logikaxiomen* an die Seite gestellt werden. In unserem Fall sind diese Theorieaxiome die Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, formuliert in der formalen Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe.

Die Geschichte der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre beginnt im Jahr 1904 mit dem Beweis des *Wohlordnungssatzes* durch den deutschen Mathematiker Ernst Zermelo. Dieser Satz besagt, dass für jede Menge eine andere Menge existiert, die auf den Elementen der ersten Menge eine Wohlordnung definiert. Oder in einer kürzeren Formulierung: Jede Menge lässt sich wohlordnen. Auf den Begriff der wohlgeordneten Menge werden wir in diesem Buch an vielen Stellen stoßen. Er beschreibt eine linear geordnete Menge mit der speziellen Eigenschaft, dass in jeder nichtleeren Teilmenge ein minimales Element existiert. Dass sich die Elemente jeder Menge derart anordnen lassen, ist alles andere als selbstverständlich. Betrachten wir beispielsweise die rationalen oder die reellen Zahlen in ihrer gewöhnlichen Reihenfolge, so sind diese Zahlen zwar linear geordnet, aber nicht wohlgeordnet. Natürlich ist die uns vertraute Anordnung dieser Zahlen nur eine von vielen, und es ist nicht schwer, die rationalen Zahlen so umzusortieren, dass eine wohlgeordnete Menge entsteht. Völlig anders ist die Situation bei den reellen Zahlen. Als Zermelo seinen Satz formulierte, waren bereits zahlreiche Mathematiker mit dem Versuch gescheitert, eine Wohlordnung der reellen Zahlen konkret anzugeben, und nicht wenige waren der Meinung, dass es eine solche gar nicht geben könne. Umso erstaunlicher war Zermelos Satz, der für ausnahmslos jede Menge die Existenz einer Wohlordnung behauptete.

Entsprechend kontrovers wurde der Beweis des Wohlordnungssatzes diskutiert, und nach und nach häuften sich die Einwände. Einige Mathematiker lehnten den Beweis als Ganzes ab, da er im Kern auf einem nichtkonstruktiven Auswahlprinzip beruhte. Andere warfen Zermelo vor, in mindestens einer seiner Mengendefinitionen eine verbotene Selbstreferenz verwendet zu haben. Immer klarer ließ der anhaltende Streit um den Wohlordnungssatz ein grundsätzliches Problem der noch jungen Mengenlehre in den Vordergrund rücken. Es herrschte schlicht keine Einigkeit darüber, was Mengen überhaupt sind, und vor allem, welche Eigenschaften diesen neu geschaffenen mathematischen Entitäten zugebilligt werden durften.

Der vorsichtige Umgang mit dem Mengenbegriff kam nicht von ungefähr, denn längst war bekannt, dass der freizügigen Bildung von Mengen Grenzen gesetzt waren. So hatte Cantor selbst bemerkt, dass es unmöglich war, die von ihm entdeckte Aleph-Reihe als eine Menge zu betrachten. Werden alle Kardinalzahlen gedanklich miteinander vereint, so entsteht eine Menge, deren Kardinalität größer ist als alle in ihr enthalte-

nen Elemente. Es müsste dann eine Kardinalzahl existieren, die zu der neu gebildeten Menge gehört und nicht gehört, was uns einen unauflösbaren Widerspruch beschert. Cantor trat diesen „inkonsistenten Totalitäten“, wie er sie nannte, mit einer erhabenen Gelassenheit gegenüber. Er betrachtete sie als kuriose Randerscheinungen einer ansonsten intakten Theorie, die sich mit ein wenig logischer Intuition auch stets als solche erkennen ließen.

Zu einem dringlichen Problem werden solche Antinomien dann, wenn das Führen eines Beweises, der Hilbert’schen Schule folgend, als eine syntaktische Manipulation von Zeichenketten betrachtet wird. In einem formalen System hat die mathematische Intuition keinen Platz. Sobald es möglich ist, durch die formale Anwendung von Schlussregeln auch nur eine einzige antinomische Menge zu bilden, werden sämtliche Formeln zu beweisbaren Aussagen und die Integrität des gesamten Systems zerstört.

Anfänglich versuchte Zermelo, seine Kritiker von der Korrektheit seines Beweises zu überzeugen, doch erfolgreich war er damit nicht. Vier Jahre später ging er dann mit einem neuen Beweis des Wohlordnungssatzes in die Offensive [46]. Dieses Mal tastete er sich vorsichtiger voran und sicherte die Konstruktion aller im Beweis verwendeten Mengen durch die Angabe von vier Axiomen ab. Die ersten drei Axiome postulierten die Existenz der Separationsmenge, der Potenzmenge und der Vereinigungsmenge. Das vierte Axiom war das Auswahlaxiom, das wir zusammen mit den anderen Axiomen in Kapitel 2 besprechen. Dieses Axiom legitimierte das Auswahlprinzip, das im Beweis des Wohlordnungssatzes die zentrale Rolle spielte.

In einer zeitgleich publizierten Arbeit hatte Zermelo die genannten Axiome durch weitere ergänzt und damit den Grundstein der axiomatischen Mengenlehre gelegt [47]. Alles in allem bestand sein Axiomensystem aus sieben umgangssprachlich formulierten Axiomen. Weiter oben haben wir erwähnt, wie wichtig es war, die Bildung von antinomischen Mengen zu verhindern, und entsprechend konservativ waren die Axiome formuliert. Es war jetzt beispielsweise nicht mehr möglich, alle Kardinalzahlen miteinander zu vereinen. Doch auch manch gutartige Menge ließ sich mit den vorgelegten Axiomen nicht mehr bilden, und so wurde Zermelos Axiomensystem in den Folgejahren von anderen Mathematikern modifiziert und ergänzt. Es war eine Wanderung auf einem schmalen Grat. Einerseits galt es, Zermelos Axiome so zu verändern, dass sich möglichst alle gutartigen Mengen innerhalb der Logik darstellen ließen, andererseits musste darauf geachtet werden, dass keine antinomischen Mengen gebildet werden konnten. Das Ergebnis dieser Entwicklung ist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, die wir in Kapitel 2 besprechen.

Übersetzen wir die Axiome in die Sprache der Prädikatenlogik, wie es in Abbildung 1.7 am Beispiel des Potenzmengenaxioms gezeigt ist, und fügen die erhaltenen Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe als Theorieaxiome hinzu, so entsteht das formale System ZFC^1 , das wir in Kapitel 3 besprechen und zur Klärung der Beweisbarkeitsfrage

¹Zermelo-Fraenkel set theory with axiom of Choice.

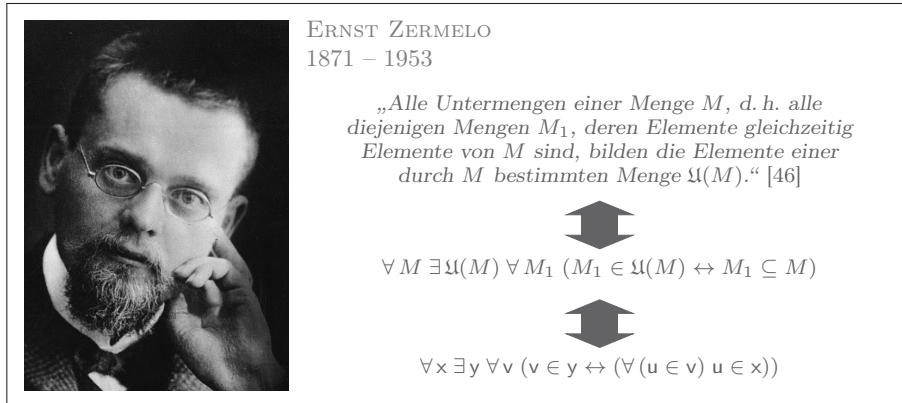


Abbildung 1.7: Zermelos Potenzmengenaxiom und seine Formalisierung in ZFC

heranziehen. Wenn wir also sagen, die Kontinuumshypothese sei mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik unentscheidbar, so meinen wir damit, dass die Formel φ , die die Kontinuumshypothese in der Prädikatenlogik erster Stufe beschreibt, innerhalb von ZFC unentscheidbar ist, also weder φ noch $\neg\varphi$ aus den Axiomen von ZFC im logischen Schlussapparat der Prädikatenlogik hergeleitet werden kann.

1.2 Unabhängigkeitsbeweise

Wir wollen uns intensiver mit der Frage beschäftigen, wie die Unbeweisbarkeit einer Formel φ gezeigt werden kann. Zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten stehen uns zur Verfügung:

1. Beweis auf der Syntaxebene

Die erste Möglichkeit besteht darin, auf einer symbolischen Ebene zu argumentieren. Das bedeutet, dass wir die Axiome und Schlussregeln des formalen Systems einer genauen Analyse unterziehen und nach einem Grund suchen, warum eine ganz bestimmte Zeichenkette, unsere Formel φ , nicht das Ergebnis einer Ableitung sein kann. Eine solche Analyse würde bewusst davon absehen, die Formeln inhaltlich zu interpretieren und sich ausschließlich auf die Form und die Struktur der ableitbaren Zeichenketten beziehen. Von den meisten Mathematikern wird die Chance, eine Aussage wie die Kontinuumshypothese auf diese Weise als unbeweisbar zu identifizieren, als gering erachtet. Die Axiome von ZFC sind für ein solches Vorhaben schlicht zu komplex und die zur Verfügung stehenden Beweismittel zu primitiv.

2. Beweis auf der Semantikebene

Die andere Möglichkeit besteht darin, auf einer inhaltlichen Ebene zu argumentieren. Das heißt, dass wir die Formeln der Kalkülsprache mit einer Bedeutung versehen, sie inhaltlich interpretieren. Hierdurch wird unser Argumentationsspielraum erheblich größer, da wir dann nicht nur in der Lage sind, zwischen beweisbaren und unbeweisbaren Formeln zu unterscheiden, sondern auch zwischen wahren und falschen. Die Wahrheit oder die Falschheit einer Formel ist dabei immer an eine konkrete Interpretation ihrer Symbole gebunden; in Bezug auf eine bestimmte Interpretation kann eine Formel wahr sein und in Bezug auf eine andere falsch.

1.2.1 Modellkonstruktion

Im Zentrum eines semantischen Unabhängigkeitsbeweises steht die Konstruktion von *Modellen*. Für unsere Zwecke ist die Modellkonstruktion so wichtig, dass wir uns an einem konkreten Beispiel ansehen wollen, was sich dahinter verbirgt. Hierfür betrachten wir die fünf in Tabelle 1.1 aufgelisteten Axiome, die eine Aussage über die Beschaffenheit zweier Mengen x und y tätigen (vgl. [38]).

Die fünf Axiome machen Aussagen über gewisse Mengenzugehörigkeiten und lassen sich problemlos in der formalen Sprache von ZFC niederschreiben. Die erste Aussage lässt sich beispielsweise durch die folgende Formel ausdrücken:

$$\forall (u \in x) \forall (v \in x) (u \neq v \rightarrow \exists_1 (w \in y) (u \in w \wedge v \in w)) \quad (1.2)$$

Wenn wir sagen, unser betrachtetes Axiomensystem habe ein Modell, dann postulieren wir damit die Existenz zweier Mengen x und y mit der Eigenschaft, dass die Axiome und alle logischen Folgerungen daraus wahre Aussagen über x und y sind. Für unser Beispielsystem müssen wir gar nicht lange suchen. Wir erhalten ein Modell, wenn wir x und y als die folgenden beiden Mengen interpretieren (Abbildung 1.8 links):

$x =$ „Die drei Eckpunkte eines Dreiecks“

$y =$ „Die drei Punktfolgen, die die Seiten des Dreiecks bilden“

Unter der gewählten Interpretation drücken alle Axiome einen wahren Sachverhalt über die Ecken und Seiten von Dreiecken aus. Mit anderen Worten: Unter der gewählten Interpretation sind alle Axiome wahr. Unter der Annahme, dass sich mit den gewöhnlichen Schlussregeln der Mathematik aus Wahrem nur Wahres ableiten lässt, sind dann auch sämtliche Aussagen, die aus den fünf Axiomen logisch hergeleitet werden können, wahre Aussagen über die Ecken und Seiten von Dreiecken, also wahre Aussagen über x und y . Dies ist gemeint, wenn wir sagen, die gewählte Interpretation für x und y sei ein Modell unseres Axiomensystems.

Axiom 1:	„Je zwei beliebige Elemente von x sind in genau einem Element von y enthalten.“
Axiom 2:	„Jedes Element von x ist in gleich vielen Elementen von y enthalten.“
Axiom 3:	„Die Elemente von x sind nicht alle in einem einzigen Element von y enthalten.“
Axiom 4:	„Zwei verschiedene Elemente von y enthalten genau ein Element von x gemeinsam.“
Axiom 5:	„Kein Element von y enthält mehr als zwei Elemente von x .“

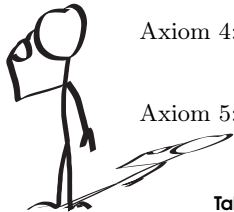


Tabelle 1.1: Hat dieses Axiomensystem ein Modell?

Um symbolisch auszudrücken, dass z. B. das erste Axiom unter der gewählten Interpretation von x und y eine wahre Aussage ist, werden wir später Folgendes schreiben:

$$\models \forall (u \in x) \forall (v \in x) (u \neq v \rightarrow \exists_1 (w \in y) (u \in w \wedge v \in w)) \quad (1.3)$$

Das Zeichen \models ist die Modellrelation und wird in Kapitel 3 erklärt. Ferner fällt auf, dass wir x und y in (1.3) in einer anderen Schriftart gesetzt haben als weiter oben in (1.2). Dies ist kein Fehler. In der Formel (1.2) stehen die Symbole x und y für Variablen, die zur Sprache der Prädikatenlogik gehören. Formal handelt es sich dabei um inhaltsleere Symbole, die ein Teil einer größeren, zusammengesetzten Zeichenkette sind. In (1.3) haben wir die Formel inhaltlich interpretiert und mit der Modellrelation \models ausgedrückt, dass die Formel zu einer wahren Aussage wird, wenn wir die Variablen x und y als die weiter oben eingeführten Mengen x und y interpretieren.

Unser Modell erfüllt eine wichtige Eigenschaft, die an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben soll. Es wurden nämlich nicht nur die Symbole x und y mit einer bestimmten Bedeutung versehen, sondern auch das Zeichen \in . Unser Modell ist ein sogenanntes *Standardmodell*, da \in als die gewöhnliche Elementrelation interpretiert wird. Würden wir \in als eine andere Relation interpretieren, so erhielten wir ein sogenanntes *Nichtstandardmodell*.

Unser Beispiel haben wir so gewählt, dass die Mengen x und y gleich viele Elemente enthalten. Diese Eigenschaft lässt sich mit einer prädikatenlogischen Formel φ beschreiben, was uns direkt zu der Frage führt, ob φ beweisbar ist. Momentan können wir darauf noch keine Antwort geben. Wir wissen lediglich, dass φ unter der gewählten Interpretation eine wahre Aussage ist, aber wir wissen nicht, ob diese Formel durch logische Schlüsse aus den fünf vorgegebenen Axiomen hergeleitet werden kann. Tat-

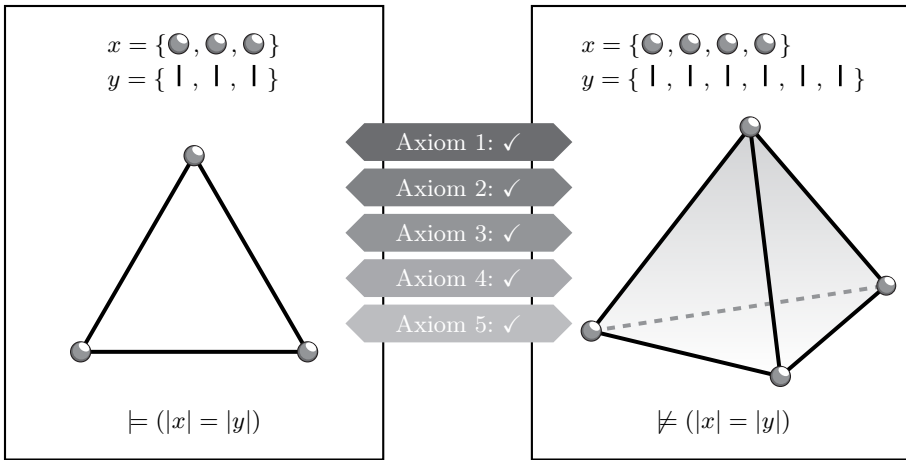


Abbildung 1.8: Zwei Modelle des eingeführten Axiomensystems

sächlich wissen wir aber etwas anderes. Wenn φ unter der gewählten Interpretation wahr ist, dann ist deren Negation $\neg\varphi$ unter der gewählten Interpretation falsch. Dann kann die Formel $\neg\varphi$ nicht beweisbar sein, da dies ein unmittelbarer Widerspruch zur Modelleigenschaft wäre. Wir erinnern uns: Ein Modell ist eine inhaltliche Interpretation, die alle Theoreme, d. h. alle Formeln, die aus den Axiomen abgeleitet werden können, zu wahren Aussagen werden lässt.

Damit sind wir an einem zentralen Punkt angekommen. Gelingt es uns, ein Modell zu konstruieren, in dem die Formel $\neg\varphi$ eine wahre Aussage ist, so können wir mit dem gleichen Argument wie eben die Formel φ als unbeweisbar identifizieren. Zusammen haben wir dann gezeigt, dass die Formel φ innerhalb des formalen Systems unentscheidbar ist, also weder bewiesen noch widerlegt werden kann.

Erneut müssen wir für unser gewähltes Axiomensystem nicht lange suchen. Wir erhalten ein solches Modell durch die folgende Wahl von x und y :

$x = \text{„Die vier Eckpunkte einer Pyramide“}$

$y = \text{„Die sechs Punktmengen, die die Seiten der Pyramide bilden“}$

Abbildung 1.8 zeigt, dass die fünf Axiome auch unter dieser Interpretation wahr sind. Die Aussage, x und y enthielten die gleiche Anzahl an Elementen, ist hingegen falsch.

Damit ist die Idee offengelegt, die allen modellbasierten Unabhängigkeitsbeweisen innewohnt. Um eine Aussage wie die Kontinuumshypothese als eine Aussage zu identifizieren, die mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik weder bewiesen noch widerlegt werden kann, reicht es aus, zwei Modelle für das formale System ZFC zu

konstruieren, und zwar so, dass die Kontinuumshypothese in einem dieser Modell eine wahre und in dem anderem eine falsche Aussage ist.



Bearbeiten Sie Aufgabe 1.7.

Den oben angestellten Gedankengang können wir folgendermaßen zusammenfassen: Hat ein formales System ein Modell, so kann es keine Formel φ mit der Eigenschaft geben, dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ aus den Axiomen hergeleitet werden können. Formale Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *widerspruchsfrei*, sodass wir den Gedankengang auch folgendermaßen formulieren können: Hat ein formales System ein Modell, so ist es zwangsläufig widerspruchsfrei. Beachten Sie an dieser Stelle, dass die Modellexistenz eine semantische Eigenschaft ist, die Widerspruchsfreiheit hingegen eine syntaktische. Für die Frage, ob ein vorgelegtes formales System widerspruchsfrei ist oder nicht, spielt es keine Rolle, ob bzw. wie die Symbole einer Formel inhaltlich interpretiert werden. Es ist lediglich relevant, ob eine Formel existiert, die zusammen mit ihrer Negation durch die Anwendung formaler Schlussregeln aus den Axiomen hergeleitet werden kann oder nicht.

Der zweite Gödel'sche Unvollständigkeitssatz

In diesem Zusammenhang wird ein zentraler Satz aus der mathematischen Logik relevant, dessen Entdeckung durch Kurt Gödel im Jahr 1933 einen Wendepunkt in der Entwicklung der Mathematik markiert. Der Satz wird lapidar als der zweite Gödel'sche Unvollständigkeitssatz bezeichnet, doch sein Inhalt kommt einem mathematischen Erdbeben gleich. Gödel hatte bewiesen, dass die Widerspruchsfreiheit von bestimmten formalen Systemen, zu denen auch ZFC gehört, niemals mit den gleichen Beweismitteln gezeigt werden kann, die in dem formalen System selbst enthalten sind. Die Sprengkraft dieses Satzes wird deutlich, wenn wir uns daran erinnern, dass wir mit dem System ZFC eine Formalisierung der gewöhnlichen Mathematik vorhaben. Somit besagt der zweite Unvollständigkeitssatz nichts anderes, als dass sich die Widerspruchsfreiheit von ZFC nicht mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik beweisen lässt. Da aber die Existenz eines Modells die Widerspruchsfreiheit impliziert, können wir nicht sicher sein, ob ZFC überhaupt ein Modell hat.

Der zweite Gödel'sche Unvollständigkeitssatz scheint unser Vorhaben, die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese auf der semantischen Ebene zu beweisen, ad absurdum zu führen. Wenn wir nicht wissen können, ob ein Modell für ZFC existiert, wie können wir dann den oben skizzierten Plan umsetzen, der in der Konstruktion zweier Modelle besteht, in denen die Kontinuumshypothese einmal eine wahre und einmal eine falsche Aussage ist? Die Lösung des Problems besteht darin, die Existenz schlicht und einfach zu behaupten und danach zu zeigen, wie sich aus dem postulierten Modell

die beiden Modelle mit den beschriebenen Eigenschaften konstruieren lassen. Das bedeutet natürlich auch, dass alle Aussagen, die wir in diesem Buch über Modelle von ZFC beweisen, unter einem Vorbehalt stehen: dem Vorbehalt, dass überhaupt ein Modell für das formale System ZFC existiert.

Ein zweiter Blick macht deutlich, dass die Last, die uns der zweite Gödel'sche Unvollständigkeitssatz aufbürdet, keine allzu große ist. ZFC gehört zu einer Gruppe formaler Systeme, für die die Modellexistenz und die Widerspruchsfreiheit äquivalente Eigenschaften sind. Hätte ZFC kein Modell, so müsste eine Aussage φ mit der Eigenschaft existieren, dass sowohl φ als auch die Negation $\neg\varphi$ beweisbar sind. Dies wiederum würde bedeuten, dass der Mengenbegriff, wie er durch die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre vorgegeben wird, in sich inkonsistent wäre. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies tatsächlich der Fall ist, wird von den allermeisten Mathematikern als gering erachtet. Heute wird die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre auf einer so breiten Basis akzeptiert, dass wir sie mit Fug und Recht als das formale Fundament ansehen dürfen, auf dem die gesamte moderne Mathematik errichtet ist. Wenn wir die Existenz eines Modells von ZFC als gegeben annehmen, sprechen wir also lediglich eine Voraussetzung aus, die von den meisten ohnehin als eine Selbstverständlichkeit erachtet wird: die logische Integrität der modernen Mathematik.

1.2.2 Innere und äußere Modelle

Wir fassen zusammen: Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese lässt sich beweisen, indem aus einem postulierten Modell von ZFC zwei andere Modelle erzeugt werden: eines, in dem die Hypothese wahr ist, und ein anderes, in dem sie falsch ist. Zwei Mathematikern war es gelungen, diese Modelle tatsächlich zu konstruieren, in einem Abstand von 25 Jahren [21, 10].

Den Anfang machte Kurt Gödel im Jahr 1938 mit der Konstruktion eines Modells, in dem die Kontinuumshypothese wahr ist [21]. In Anlehnung an das bekannte Mengenuniversum V , in dem alle Mengen entlang der Ordinalzahlen hierarchisch geordnet sind, definierte Gödel eine Hierarchie L , in der nur bestimmte Mengen aus V enthalten waren, nämlich solche, die sich durch die wiederholte Anwendung gewisser Bildungsregeln erzeugen ließen. Gödel hatte ein sogenanntes *inneres Modell* konstruiert, da alle Elemente aus L , Gödel nannte sie die *konstruktiblen Mengen*, in V enthalten sind, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Danach bewies Gödel zwei Dinge. Zum einen zeigte er, dass sich die Annahme, V sei ein Modell von ZFC, auf L überträgt. Ein solcher Beweis wird als *relativer Beweis* bezeichnet, da er die Existenz eines Modells von ZFC voraussetzt. Das Führen eines absoluten Beweises war für ihn unmöglich, da die Existenz eines Modells von ZFC aufgrund des zweiten Unvollständigkeitssatzes nicht mit gewöhnlichen Beweismitteln gezeigt werden kann. Zum anderen bewies Gödel, dass die Kontinuumshypothese in L eine wahre Aussage ist, und das bedeutet, dass

es unter den genannten Voraussetzungen unmöglich ist, die Kontinuumshypothese in ZFC zu widerlegen.

Auch wenn wir Gödels Beweis nicht besprechen werden, darf der Hinweis nicht fehlen, dass der Begriff des Modells eben in einem weiteren Sinne verwendet wurde, als wir es im Rest dieses Buchs zulassen. Das Mengenuniversum V und das daraus konstruierte innere Modell L sind sogenannte Klassen, da sie, plakativ gesprochen, zu groß sind, um eine Menge zu sein. Wenn wir in den nächsten Kapiteln von einem Modell von ZFC sprechen, werden wir aber immer eine Menge meinen. Wir fassen den Modellbegriff in diesem Buch also deutlich enger, und nach dieser engeren Definition sind weder V noch L Modelle von ZFC.

Gödel vermutete, dass auch die Negation der Kontinuumshypothese, die Formel $\neg CH$, unbeweisbar ist, die Kontinuumshypothese von den ZFC-Axiomen also unabhängig ist. Gleichzeitig war er davon überzeugt, dass dies nicht auf die gleiche Weise gezeigt werden kann wie die Unbeweisbarkeit von CH . Wir wollen kurz ausführen, warum er zu diesem Schluss kam: Möchten wir die Kontinuumshypothese beispielsweise mit einem Modell falsifizieren, in dem die Kardinalität der reellen Zahlen, nicht wie im ersten Fall der Kardinalzahl \aleph_1 , sondern der Kardinalzahl \aleph_2 entspricht, so müsste in diesem Modell eine Bijektion zwischen der Menge \mathbb{R} und der Menge \aleph_2 existieren. Am einfachsten gelänge dies mit einer Methode, die ein vorhandenes Modell um die benötigte Bijektion ergänzt. Eine solche Methode sollte also gerade das Gegenteil leisten als die von Gödel entwickelte. Sie musste ein gegebenes Modell zu einem *äußeren Modell* erweitern, anstatt es zu einem inneren Modell auszudünnen. Doch wie genau sollte dies gelingen? Es ist klar, dass wir die benötigte Bijektion einem anderen Modell nicht einfach als ein singuläres Element hinzufügen können, da wir damit sofort die Modelleigenschaft zerstören. Die Beigabe neuer Mengen muss so geschickt erfolgen, dass neben der benötigten Bijektion so viele andere Mengen in das Modell aufgenommen werden, dass alle Theoreme von ZFC wahre Aussagen bleiben. Weder Gödel noch ein anderer Mathematiker hatte damals eine Vorstellung davon, wie eine solche Konstruktion gelingen könnte, und die Jahre verstrichen ohne einen nennenswerten Erfolg.

Der Durchbruch gelang dem US-amerikanischen Mathematiker Paul Cohen im Jahr 1963 mit der Entwicklung der *Forcing-Technik*, dem Gegenstand dieses Buchs. Cohen hatte einen trickreichen Weg gefunden, um gewisse Mengen in bestehende Modelle einzuschleusen, ohne die Modelleigenschaft zu zerstören. Wie flexibel die Forcing-Technik ist, werden Sie in Kapitel 8 erfahren. Mit ihr sind wir in der Lage, die Kardinalität der reellen Zahlen an eine beliebige Stelle der Aleph-Reihe zu schieben, mit der Ausnahme von \aleph_0 , der Kardinalität der natürlichen Zahlen. Wählen wir für $|\mathbb{R}|$ die Position von \aleph_1 , so erhalten wir ein Modell, in dem die Kontinuumshypothese wahr ist. Wählen wir eine höhere Position, so wird die Hypothese falsch. Das bedeutet, dass wir Gödels ersten Beweis, der auf der Konstruktion innerer Modelle beruht, gar

nicht mehr benötigen. Die Forcing-Technik ist leistungsfähig genug, um beide Teile des Unabhängigkeitsbeweises zu bewältigen.

Mit der Entwicklung der Forcing-Technik war Cohen ein großer Wurf gelungen. Er hatte ein mathematische Instrument erschaffen, mit dem sich nicht nur die von Gödel offen gelassene Beweislücke schließen ließ, sondern auch viele andere Aussagen als unentscheidbar identifiziert werden konnten. Wie ergiebig die Forcing-Technik tatsächlich ist, können wir in diesem Buch nur andeuten. Neben der Kontinuumshypothese lässt sich damit beispielsweise auch das Auswahlaxiom, das wir weiter oben im Zusammenhang mit dem Wohlordnungssatz erwähnt haben, als unabhängig identifizieren. Es lässt sich mit den anderen Axiomen von ZFC weder beweisen noch widerlegen.

In den folgenden Kapiteln werden wir die Forcing-Technik Schritt für Schritt entwickeln und damit demonstrieren, warum Cantor chancenlos war, die Kontinuumshypothese in die eine oder die andere Richtung zu entscheiden. Der Weg, auf den wir uns begeben, wird kein leichter sein, und ich werde auch nicht den Versuch unternehmen, dies zu suggerieren. Ein Blick auf die restlichen Seiten dieses Buchs macht klar, dass die Forcing-Technik durch den Beweis unzähliger Teilergebnisse legitimiert wird, die aus ganz unterschiedlichen mathematischen Teildisziplinen stammen und wie ein Mosaik in der richtigen Art und Weise zusammengesetzt werden müssen. Bedienen wir uns für den Moment einer Analogie aus der Medizin, so können wir konstatieren, dass der Versuch, einem Modell von ZFC eine neue Menge zu adjungieren, kein harmloser ambulanter Eingriff ist. Vielmehr haben wir es mit einer komplizierten Operation aus der Implantationsmedizin zu tun, bei der wir mit aller Vorsicht agieren müssen, um unseren fragilen Patienten am Leben zu erhalten oder mit den Worten eines Mathematikers: um die Modelleigenschaft zu bewahren. Damit wir in der Fülle der uns erwartenden Details nicht den Blick auf das Große und Ganze verlieren, möchte ich den Rest dieses Kapitels nutzen, um die geplante Modellerweiterung in groben Zügen zu skizzieren.

1.3 Forcing

Weiter oben haben wir dargelegt, dass die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese durch die Konstruktion zweier Modellerweiterungen gezeigt wird. Das zu erweiternde Modell nennen wir das *Grundmodell* \mathcal{M} . Manchmal werden wir \mathcal{M} auch etwas ausführlicher als das *postulierte Grundmodell* bezeichnen, da wir nach dem zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz nicht sicher sein können, ob \mathcal{M} überhaupt existiert. Unsere Aufgabe ist es, aus \mathcal{M} zwei neue Modelle zu konstruieren. Eines, in dem die Kontinuumshypothese wahr ist, und ein anderes, in dem sie falsch ist.

Die Wahrheit der Kontinuumshypothese bedeutet, dass innerhalb des betrachteten Modells eine Bijektion zwischen der Menge \mathbb{R} und der Menge \aleph_1 existiert. Genauer müssen wir sagen: eine Bijektion zwischen jenen Mengen, die in dem konstruierten

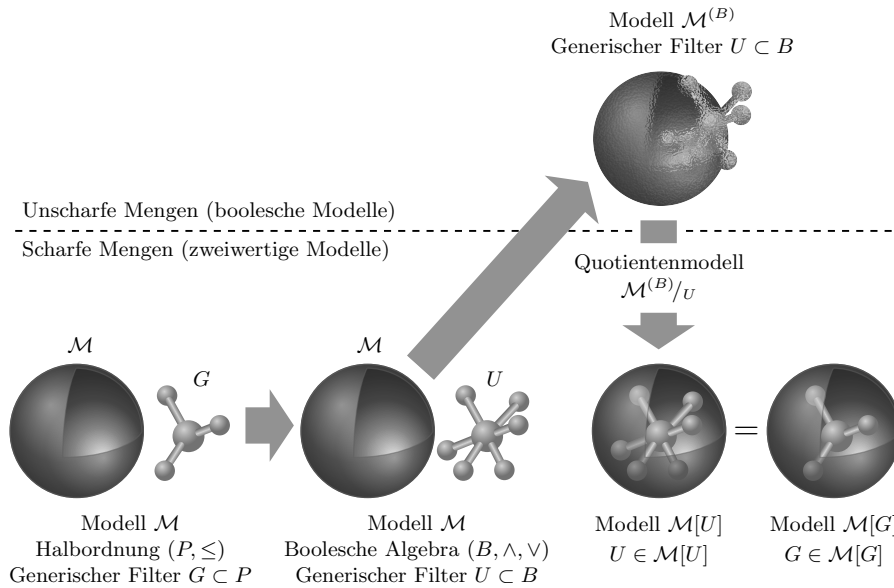


Abbildung 1.9: Die Forcing-Technik in der Übersicht

Modell die Rollen von \mathbb{R} und \aleph_1 übernehmen. Was sich genau hinter dieser etwas holprig klingenden Formulierung verbirgt, besprechen wir in Abschnitt 3.4.3. Dort werden wir sehen, dass gewisse Mengen ihre Bedeutung verändern, wenn wir von einem Modell in ein anderes übergehen. Beispielsweise müssen die Mengen, die in zwei verschiedenen Modellen die reellen Zahlen repräsentieren, von außen betrachtet nicht dieselben sein. Um mit diesem Problem umzugehen, werden wir später die Schreibweisen $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ und $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ verwenden und damit jene Mengen meinen, die innerhalb von \mathcal{M} die Rolle der reellen Zahlen bzw. die Rolle der zweiten transfiniten Kardinalzahl übernehmen. Andere Mengen wie die leere Menge oder die Menge der natürlichen Zahlen sind hingegen absolut. Sie sind in allen Modellen von ZFC dieselben, sodass wir nicht unterscheiden müssen, in welchem Modell wir sie betrachten. Für den Moment wollen wir diesen feinen, aber bedeutenden Unterschied ignorieren und etwas vereinfachend davon sprechen, dass wir eine Bijektion zwischen \mathbb{R} und \aleph_1 ergänzen müssen.

Da wir wenig über das postulierte Grundmodell wissen, können wir nicht ausschließen, dass \mathcal{M} die benötigte Bijektion bereits enthält. In diesem Fall wären wir fertig, da die Kontinuumshypothese dann eine wahre Aussage in \mathcal{M} ist. Der zweite Fall ist schwieriger und jener, für den wir uns interessieren. Wir müssen \mathcal{M} dann um eine Bijektion zwischen \mathbb{R} und \aleph_1 ergänzen, ohne die Modelleigenschaft zu zerstören.

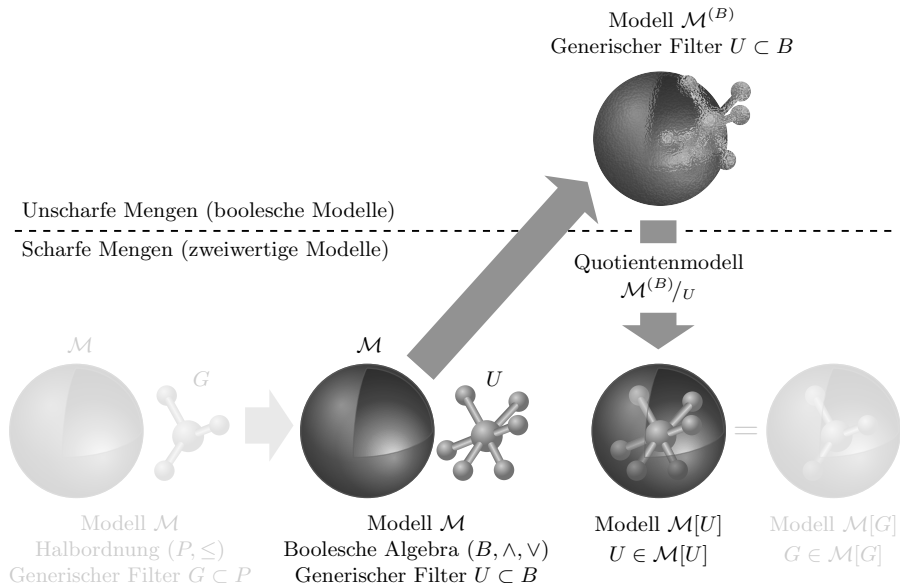


Abbildung 1.10: Das Herzstück der Modellkonstruktion

Um \mathcal{M} zu erweitern, werden wir die in Abbildung 1.9 skizzierten Schritte durchlaufen. Das Herzstück der Konstruktion bilden die beiden in Abbildung 1.10 hervorgehobenen Einzelschritte. Im ersten Schritt wird aus dem postulierten Grundmodell \mathcal{M} ein sogenanntes boolesches Modell $\mathcal{M}^{(B)}$ gebildet, das wir uns grob als eine Ansammlung von Mengen vorstellen dürfen, die mit einer gewissen Unschärfe behaftet sind und manche ihrer Elemente nur teilweise enthalten. Für die Konstruktion dieses Modells, die ausführlich in Kapitel 5 besprochen wird, benötigen wir eine in \mathcal{M} enthaltene boolesche Algebra (B, \wedge, \vee) .

Im zweiten Schritt kommt eine spezielle Menge U ins Spiel, die wir später einen *generischen Filter* nennen werden. Die genaue Beschaffenheit von U soll uns an dieser Stelle noch nicht interessieren, sondern lediglich, dass U eine Teilmenge von B ist, die anders als B nicht notwendigerweise zu \mathcal{M} gehören muss. Den generischen Filter U werden wir dazu verwenden, um das boolesche Modell in zwei Schritten in ein gewöhnliches Modell zurückzuübersetzen. Im ersten Schritt konstruieren wir aus $\mathcal{M}^{(B)}$ das *Quotientenmodell* $\mathcal{M}^{(B)}/U$. Dieses Modell ist ein Nichtstandardmodell von ZFC, da das Zeichen \in dort nicht mehr länger mit seiner natürlichen Bedeutung interpretiert wird. Dennoch sind wir mit diesem Modell schon fast am Ziel, da es sich vergleichsweise einfach in ein Standardmodell transformieren lässt, das wir mit $\mathcal{M}[U]$ bezeichnen.

Dieses Modell weist zwei wesentliche Eigenschaften auf. Zum einen werden wir zeigen, dass sämtliche Elemente von \mathcal{M} auch in $\mathcal{M}[U]$ enthalten sind, und zum anderen, dass auch U ein Element von $\mathcal{M}[U]$ ist. Gerade eben haben wir darauf hingewiesen, dass der generische Filter U , den wir für die Konstruktion verwenden, kein Element von \mathcal{M} sein muss, und genau an dieser Stelle greifen wir ein. Die Eigenschaft von U , ein Element von $\mathcal{M}[U]$, aber nicht notwendigerweise ein Element von \mathcal{M} zu sein, ist für uns das Einfallstor, über das wir \mathcal{M} gezielt infiltrieren werden. Damit sind gleichermaßen die Stellschrauben identifiziert, die uns die Konstruktion von $\mathcal{M}[U]$ beeinflussen lassen. Eine davon ist die boolesche Algebra (B, \wedge, \vee) und die andere der generische Filter U . Indem wir beide geschickt variieren, können wir \mathcal{M} zu Modellen mit ganz unterschiedlichen Eigenschaften erweitern.

An dieser Stelle erinnern wir uns daran, dass wir \mathcal{M} um eine Bijektion zwischen \mathbb{R} und \aleph_1 ergänzen möchten. Filter sind keine Bijektionen, sodass die Möglichkeit entfällt, die benötigte Menge in Form von U direkt in \mathcal{M} einzuschleusen. Hier werden wir ausnutzen, dass U nicht die einzige Menge ist, um die \mathcal{M} erweitert wird. Um die Modelleigenschaft zu erhalten, muss $\mathcal{M}[U]$ auch all jene Mengen umfassen, die sich innerhalb von $\mathcal{M}[U]$ aus U konstruieren lassen. Wenn wir den generischen Filter so geschickt wählen, dass die benötigte Bijektion einer dieser Mengen ist, so haben wir unser Ziel erreicht. Die Bijektion wird dann sozusagen im Schlepptau von U in das Modell hineingezogen.

Damit unser Vorhaben gelingt, müssen wir eine hinreichend große Kontrolle über die Wahl des generischen Filters U gewinnen. An diesem Punkt werden wir mit dem Problem konfrontiert sein, dass sich U durch die Angabe gewisser Eigenschaften nur indirekt charakterisieren, aber niemals konkret niederschreiben lässt. Tatsächlich werden wir später noch nicht einmal wissen, ob U ein Bestandteil des postulierten Grundmodells ist oder nicht. Dies wird uns am Ende von Kapitel 7 zu der Einsicht führen, ein zwar leistungsstarkes, aber schwer zu kontrollierendes mathematisches Instrumentarium erschaffen zu haben.

Aus diesem Grund werden wir unser entwickeltes Instrumentarium in Kapitel 8 zunächst um jene Bestandteile erweitern, die in Abbildung 1.10 aufgeheilt dargestellt sind. Die neu hinzugekommenen Komponenten können wir uns, mit den Worten eines Informatikers gesprochen, als eine vereinfachte Benutzungsschnittstelle vorstellen, mit der sich die Modellkonstruktion deutlich einfacher in Gang setzen lässt. Im Kern besteht die Veränderung darin, die boolesche Algebra (B, \wedge, \vee) durch eine Halbordnung (P, \leq) und den generischen Filter U durch einen entsprechenden Ordnungsfiler $G \subseteq P$ zu ersetzen. Die Grundmethodik wird sich dabei nicht ändern. Alles, was wir oben über B und U gesagt haben, wird in gleichem Maße für P und G gelten. Der Filter G wird unser Vehikel sein, mit dem wir die benötigte Bijektion zwischen \mathbb{R} und \aleph_1 in \mathcal{M} einschleusen werden.

Vollenden werden wir unseren Plan in Abschnitt 8.2. Dort wird das eben skizzierte Instrumentarium weit genug entwickelt sein, um auf wenigen Seiten die beiden Modelle

zu konstruieren, die uns die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese demonstrieren.

Unser Plan klingt abenteuerlich? Das lässt sich kaum bestreiten, und es ist schwer zu sagen, wie Cantor darauf reagiert hätte. Doch eines bin ich mir sicher: Er hätte nicht im Traum daran gedacht, dass sich hinter seinem Jahrhunderträtsel ein mathematischer Thriller verbirgt.

„Und Sie denken wirklich, dass wir das schaffen werden?“

„Wir werden es schaffen!“

Mission Impossible, Paramount Pictures