

Aufgabe 1: Leiten Sie aus den Gesetzen der booleschen Algebra die folgenden Rechenregeln für den Äquivalenzoperator ' \leftrightarrow ' und Antivalenzoperator ' \leftrightarrow ' (XOR) her:

- $\bar{x} \leftrightarrow y = x \leftrightarrow y$
- $\bar{x} \leftrightarrow \bar{y} = x \leftrightarrow y$
- $(x \wedge z) \leftrightarrow (y \wedge z) = (x \leftrightarrow y) \wedge z$
- $(x \vee z) \leftrightarrow (y \vee z) = (x \leftrightarrow y) \vee z$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Varianten des Distributivgesetzes für \leftrightarrow und \leftrightarrow falsch sind:

- $(x \vee z) \leftrightarrow (y \vee z) = (x \leftrightarrow y) \vee z$
- $(x \wedge z) \leftrightarrow (y \wedge z) = (x \leftrightarrow y) \wedge z$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Beziehung:

- $x \leftrightarrow y \leftrightarrow z = x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$

Aufgabe 3: Die erweiterten De Morgan'schen Regeln lauten wie folgt:

- $\overline{(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n$
- $\overline{(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n$

Beweisen Sie die Regeln mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 4: Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Operatoren Mengen jeweils ein vollständiges Operatorensystem bilden:

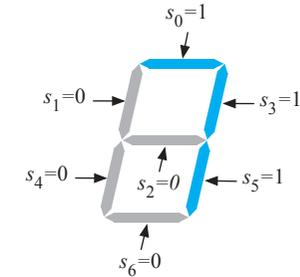
- $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\bar{\wedge}\}$
- $\{\bar{\vee}\}$

Aufgabe 5: Gegeben seien die folgenden drei booleschen Funktionen:

$$\phi_1 = (x \rightarrow y) \rightarrow z, \quad \phi_2 = x \rightarrow (y \rightarrow z), \quad \phi_3 = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{z}}$$

Stellen Sie ϕ_1 unter ausschließlicher Verwendung der NOR-Funktion, ϕ_2 unter ausschließlicher Verwendung der NAND-Funktion und ϕ_3 unter ausschließlicher Verwendung der Implikation dar.

Aufgabe 6: Für die folgende 7-Segment-Anzeige soll eine Ansteuerungslogik konstruiert werden:



Über die vier Eingangssignale x_4, \dots, x_1 nimmt die Schaltung eine beliebige BCD-Ziffer entgegen. Jedes Leuchtsegment wird über eines der sieben Ausgangssignale s_0, \dots, s_6 angesprochen und leuchtet genau dann, wenn der Wert der Steuerleitung gleich 1 ist. Modellieren Sie die Ansteuerungslogik, indem Sie zunächst die abgebildete Wahrheitstabelle vervollständigen. Stellen Sie anschließend für jedes der Ausgangssignale s_i eine boolesche Formel auf und vereinfachen Sie diese algebraisch so weit wie möglich.

	x_4	x_3	x_2	x_1	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0
0	0	0	0	0							
1	0	0	0	1							
2	0	0	1	0							
3	0	0	1	1							
4	0	1	0	0							
5	0	1	0	1							
6	0	1	1	0							
7	0	1	1	1							
8	1	0	0	0							
9	1	0	0	1							
10	1	0	1	0							
11	1	0	1	1							
12	1	1	0	0							
13	1	1	0	1							
14	1	1	1	0							
15	1	1	1	1							

Welche Werte haben Sie für die Bitkombinationen gewählt, die keiner BCD-Ziffer entsprechen? War Ihre Wahl für diese Bitkombinationen eindeutig?