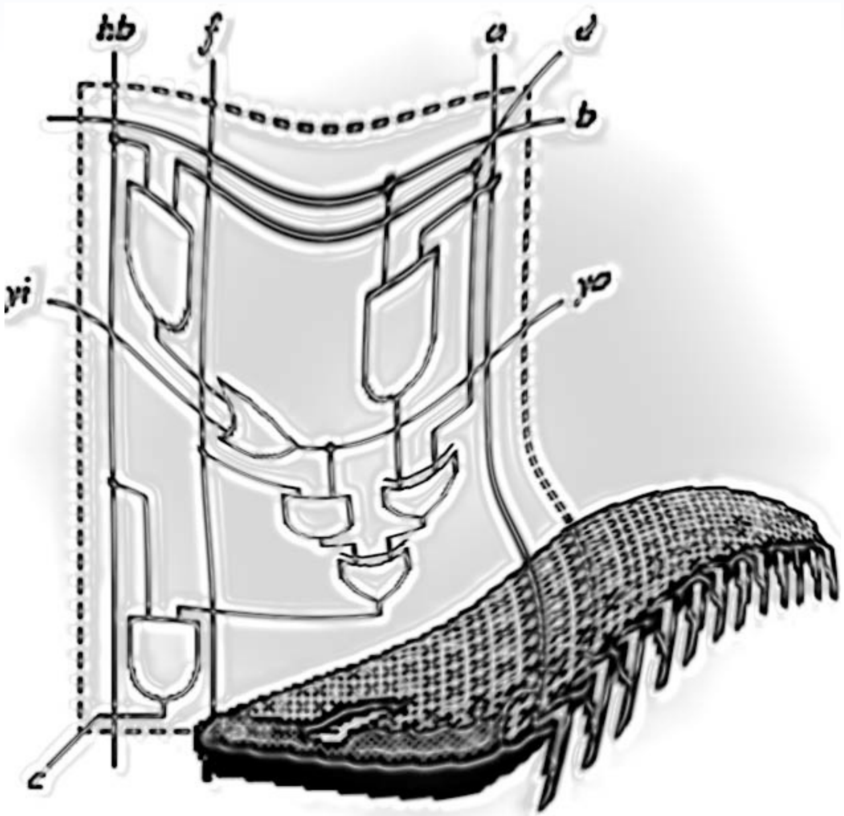
Technische Informatik I



Kapitel 4

Minimierung

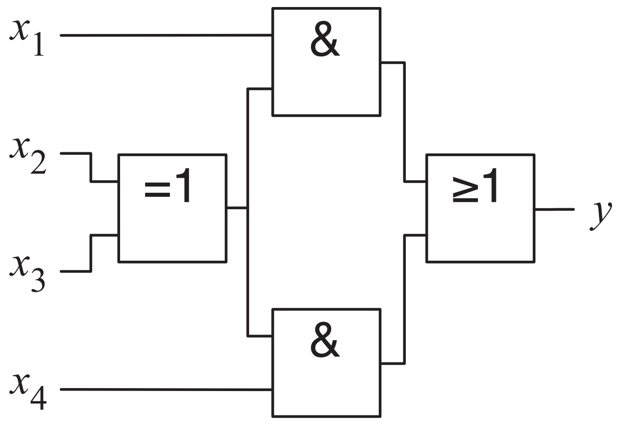
Prof. Dr. Dirk W. Hoffmann

Hochschule Karlsruhe ◆ University of Applied Sciences ◆ Fakultät für Informatik

Minimierung

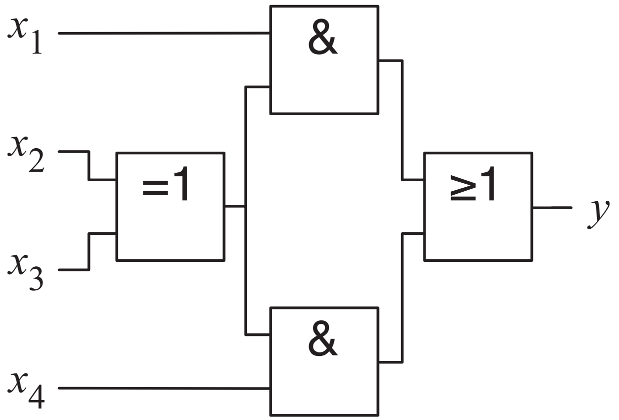
- ## Motivation
  - Jede Boolesche Funktion lässt sich auf verschiedene Weise darstellen und damit unterschiedlich in Hardware implementieren
    - Disjunktive Normalform
    - Konjunktive Normalform
    - …
  - Normalformdarstellungen sind sehr aufwendig
    - Basieren auf Mintermen bzw. Maxtermen
    - Jeder Minterm bzw. Maxterm enthält alle Eingangsvariablen
    - Formellänge steigt exponentiell mit der Anzahl der Eingangsvariablen
      - Für die Praxis nicht geeignet
- ## Ziel der Minimierung
  - Die Suche nach einer einfacheren Lösung

- Beispiel

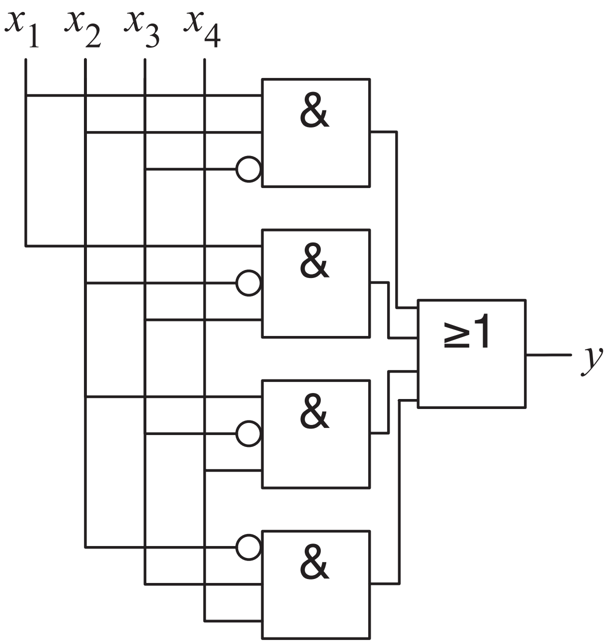


Beispiel

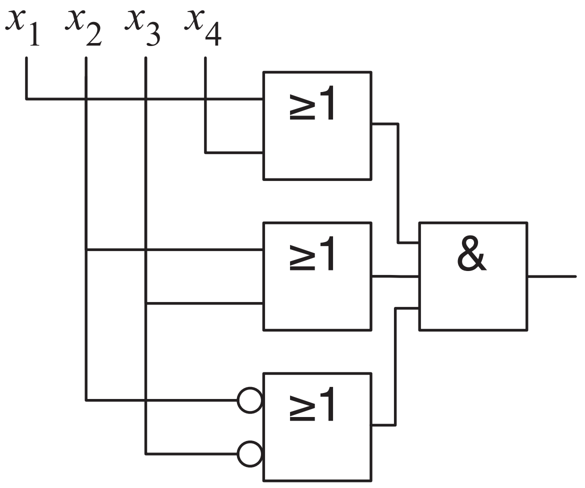
Originalschaltung



Disjunktive Form



Konjunktive Form



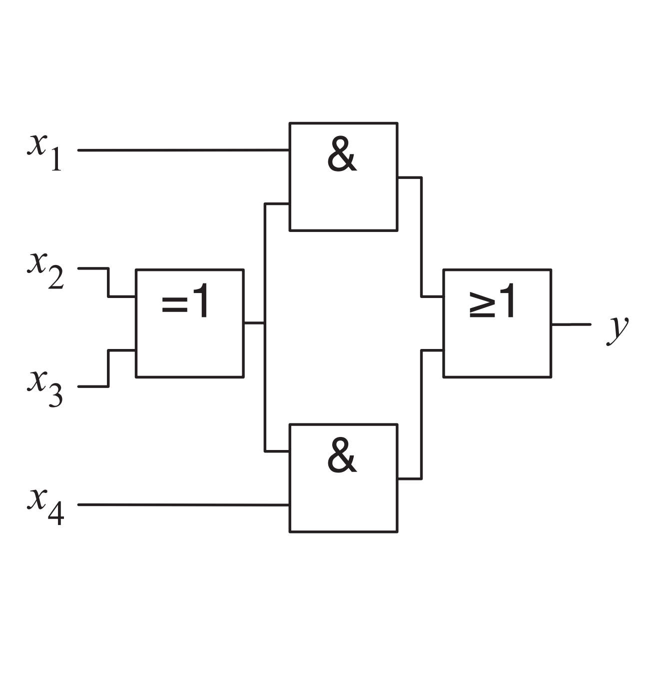
Welche Schaltung ist besser?

Optimierungsziele und Kostenfunktion

- Die Güte einer Schaltung ist relativ
  - Ob eine Schaltung „besser“ ist, hängt vom Optimierungsziel ab
- Typische Optimierungsziele
  - Hohe Taktrate („speed“)
  - Geringer Platzverbrauch („area“)
- Optimierungsziele sind komplementär
  - Schnellste Schaltung benötigt viel Platz
  - Kleinste Schaltung bietet nur geringe Taktrate
- Das Optimierungsziel wird mit einer Kostenfunktion modelliert
  - C_S = Schaltungstiefe (Geschwindigkeitsoptimierung)
  - C_A = Anzahl Zellen (Größenoptimierung)

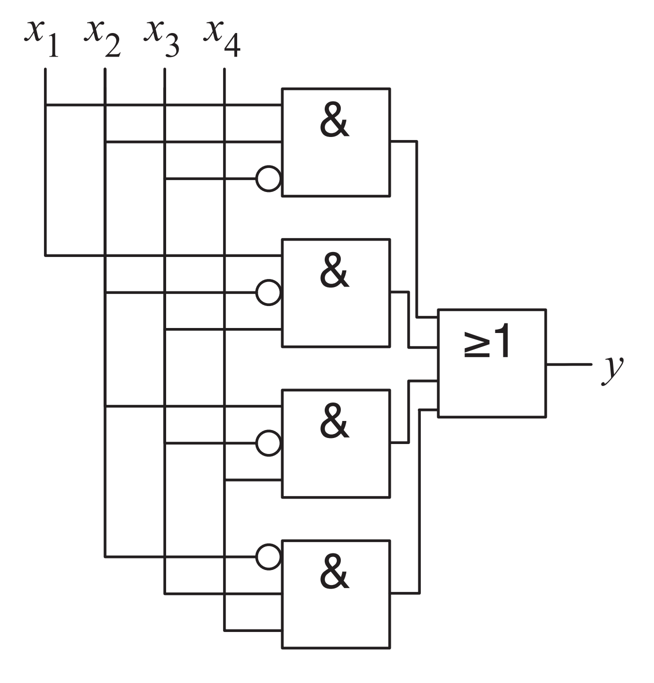
Beispiel

Originalschaltung



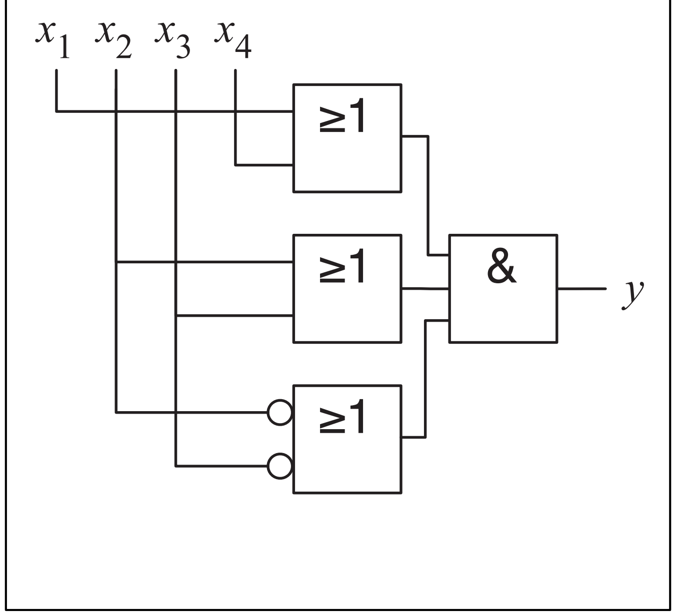
$C_A = 4$ | $C_S = 3$

Disjunktive Form



$C_A = 5$ | $C_S = 2$

Konjunktive Form



$C_A = 4$ | $C_S = 2$

Fazit: Wähle Schaltung 2 oder 3 für eine schnelle Schaltung
Wähle Schaltung 1 oder 3 für eine kompakte Schaltung

Können die Kostenfunktionen noch verbessert werden?

Verbesserte Kostenfunktionen

- Zellen sind nicht gleich Zellen
  - Schaltelemente mit vielen Eingängen sind größer
  - Verbesserung: Bilden einer gewichteten Summe

$$C_A' = \sum_{g \in \text{Gatter}} \text{Anzahl Eingänge von } g$$

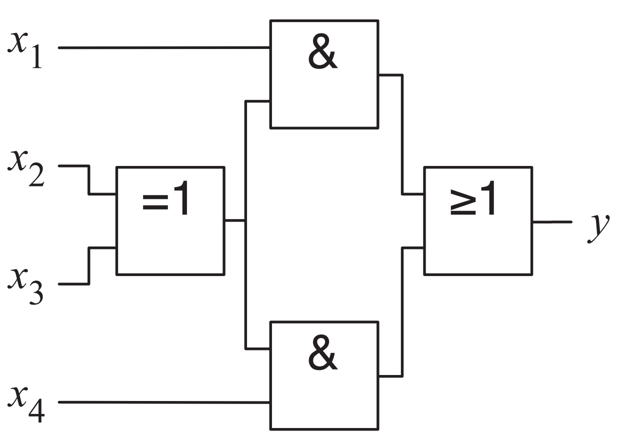
- Kombinieren verschiedener Metriken
  - Bei gleich schnellen Schaltungen wird diejenige bevorzugt, die weniger Fläche benötigt

$$C_S' = (100 \times \text{Schaltungstiefe}) + C_A'$$

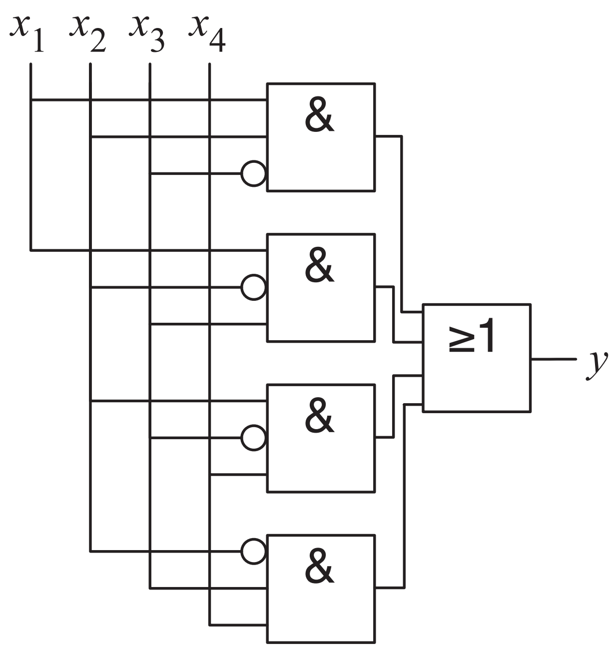
- Industrielle Werkzeuge
  - Zellenbibliothek mit Flächen- und Geschwindigkeitsdaten
  - Statische Timing-Analyse

Beispiel

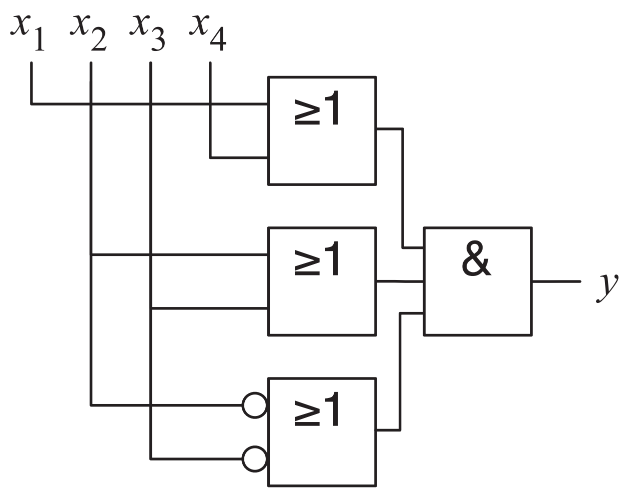
Originalschaltung



Disjunktive Form



Konjunktive Form



$C_A = 4$	$C_S = 3$	$C_A = 5$	$C_S = 2$	$C_A = 4$	$C_S = 2$
$C'_A = 8$	$C'_S = 308$	$C'_A = 16$	$C'_S = 216$	$C'_A = 9$	$C'_S = 209$

Fazit: Wähle Schaltung 3 für eine schnelle Schaltung
Wähle Schaltung 1 für eine kompakte Schaltung

Minimierung

- Nochmals zurück zu den bisher betrachteten Verfahren…
  - Disjunktive Normalform, Konjunktive Normalform
  - Beide erzeugen einen Term für <u>jede</u> 1-Zeile der Wahrheitstabelle
  - Optimierung: Zusammenfassung mehrerer Zeilen in einem Term

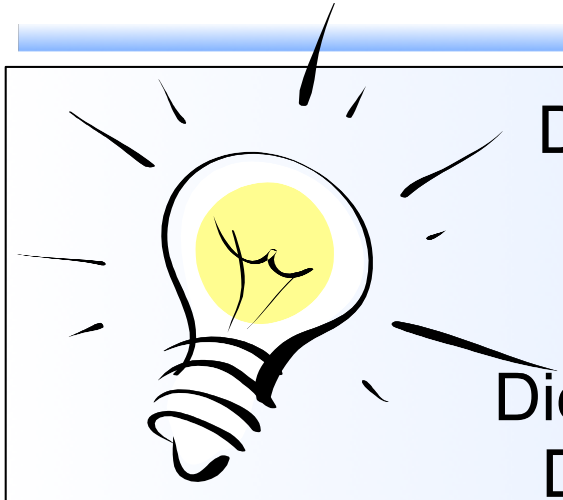
	d	c	b	a	y
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1

$d \wedge \neg c \wedge b$

	d	c	b	a	y
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1

nicht möglich

Minimierung



Die Zusammenfassung funktioniert genau dann,
wenn sich die Variablenbelegungen
in genau einer Variablen unterscheiden.

Die identisch belegten Variablen heißen *gebunden*.
Die unterschiedlich belegte Variable heißen *frei*.

	d	c	b	a	y
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1

$d \wedge \neg c \wedge b$

	d	c	b	a	y
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1

nicht möglich

Minimierung

- Welche mathematische Regel verbirgt sich hier?

	d	c	b	a	y
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1

$d \wedge \neg c \wedge b$

  - Erste Zeile: $d \wedge \neg c \wedge b \wedge \neg a$
  - Zweite Zeile: $d \wedge \neg c \wedge b \wedge a$

- Die disjunktive Verknüpfung ergibt…

$(d \wedge \neg c \wedge b \wedge \neg a) \vee (d \wedge \neg c \wedge b \wedge a) =$ (K) + (A)

$((d \wedge \neg c \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((d \wedge \neg c \wedge b) \wedge a) =$ (D)

$(d \wedge \neg c \wedge b) \wedge (\neg a \vee a) =$ (I)

$(d \wedge \neg c \wedge b) \wedge 1 =$ (N)

$d \wedge \neg c \wedge b$

Minimierung

	d	c	b	a		y
0	0	0	0	0		1
1	0	0	0	1		1
2	0	0	1	0		1
3	0	0	1	1		1
4	0	1	0	0		1
5	0	1	0	1		1
6	0	1	1	0		1
7	0	1	1	1		1
8	1	0	0	0		1
9	1	0	0	1		1
10	1	0	1	0		1
11	1	0	1	1		1
12	1	1	0	0		1
13	1	1	0	1		1
14	1	1	1	0		1
15	1	1	1	1		1

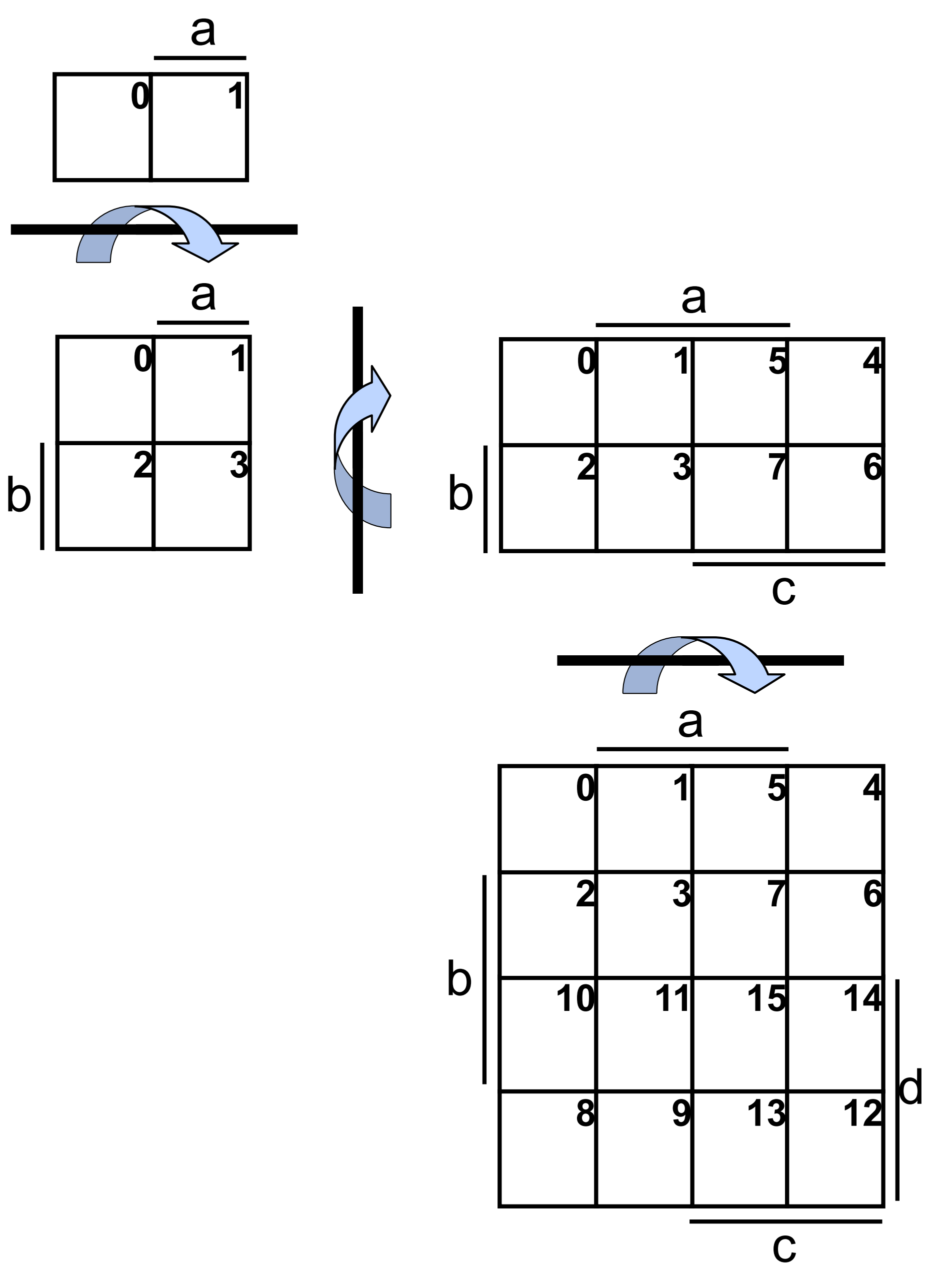
$\neg d \land \neg c \land \neg b$
—
$\neg d \land \neg c \land b$
—
$\neg d \land c \land \neg b$
—
$\neg d \land c \land b$
—
$d \land \neg c \land \neg b$
—
$d \land \neg c \land b$
—
$d \land c \land \neg b$
—
$d \land c \land b$

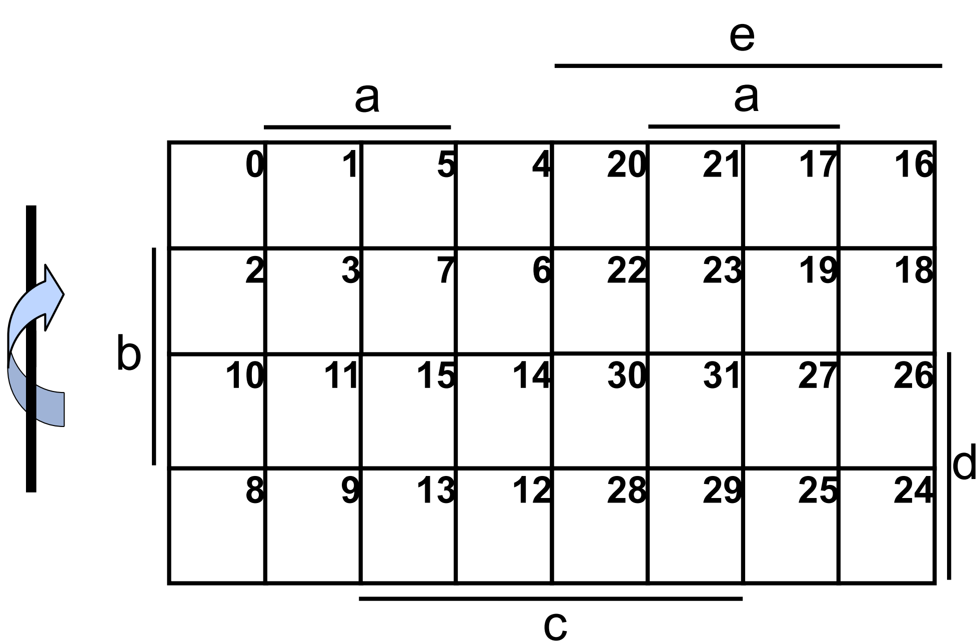
KV-Diagramme

- Nachteil der Wahrheitstabelle
  - Benachbarte Belegungen stehen in der Wahrheitstabelle nicht immer nebeneinander
  - Nebeneinander stehende Belegungen in der Wahrheitstabelle sind nicht immer benachbart
- Ziel
  - Darstellung, in der die Nachbarschaftsbeziehung offensichtlich ist
  - In einer solchen Darstellung wäre die Blockbildung einfach möglich
- Lösung
  - Karnaugh-Veitch-Diagramme (KV-Diagramme)
  - Anordnung aller Belegungen in einer Matrix
  - Grundlage für die graphische Minimierung boolescher Funktionen

Konstruktion von KV-Diagrammen

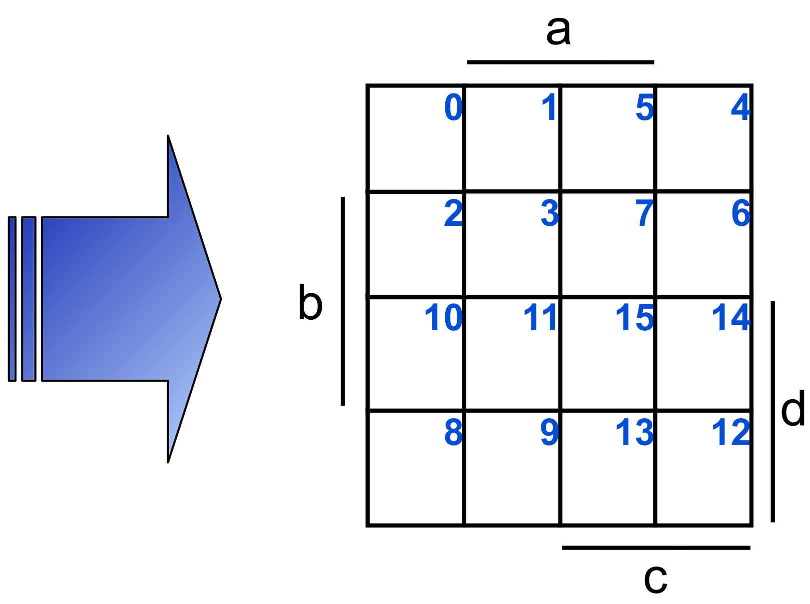
Das KV-Diagramm
für eine Funktion mit n
Variablen wird aus einem
Diagramm mit *n*-1 Variablen
durch wechselweises
horizontales und vertikales
Spiegeln erzeugt.





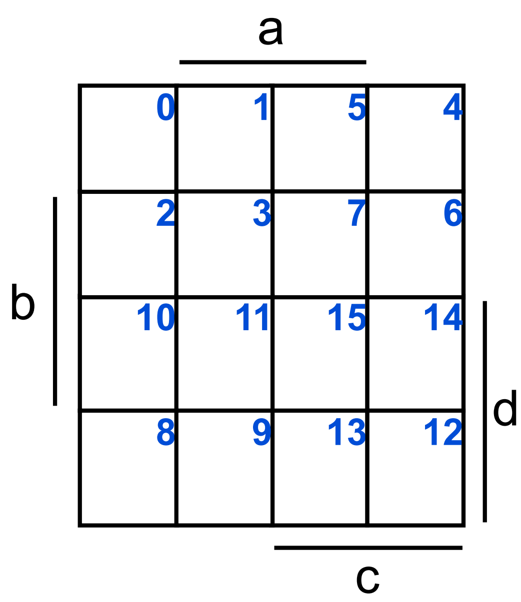
Übung 1

	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0



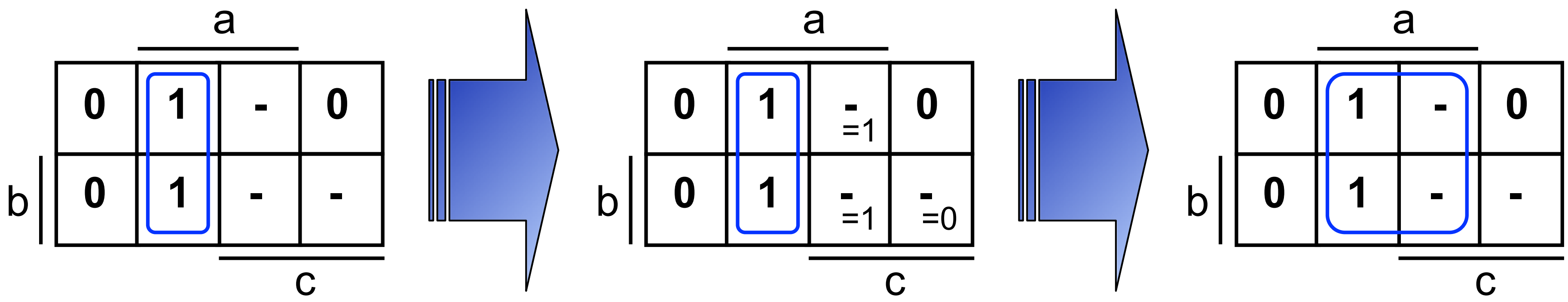
Übung 2

	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1



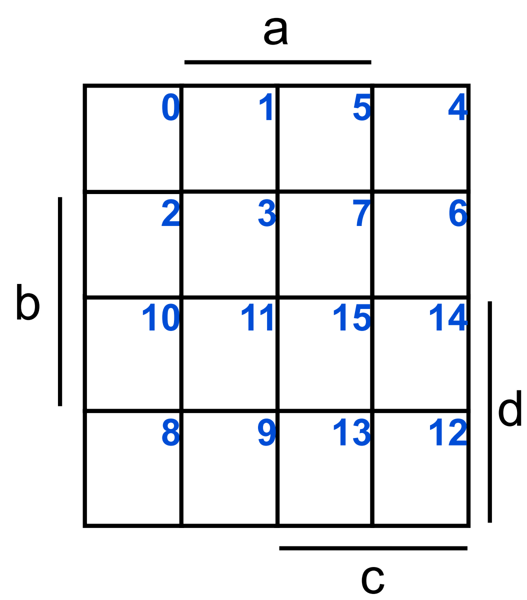
Minimierung unvollständiger Funktionen

- Wiederholung
  - Unvollständig definierter Funktionen enthalten Belegungen, für die der Funktionswert gleichgültig ist
  - Solche Belegungen werden *Freistellen* oder *Don‘t cares* genannt
- Vorgehen
  - Die Funktionswerte der Freistellen werden so gewählt, dass <u>maximal große Blöcke</u> entstehen

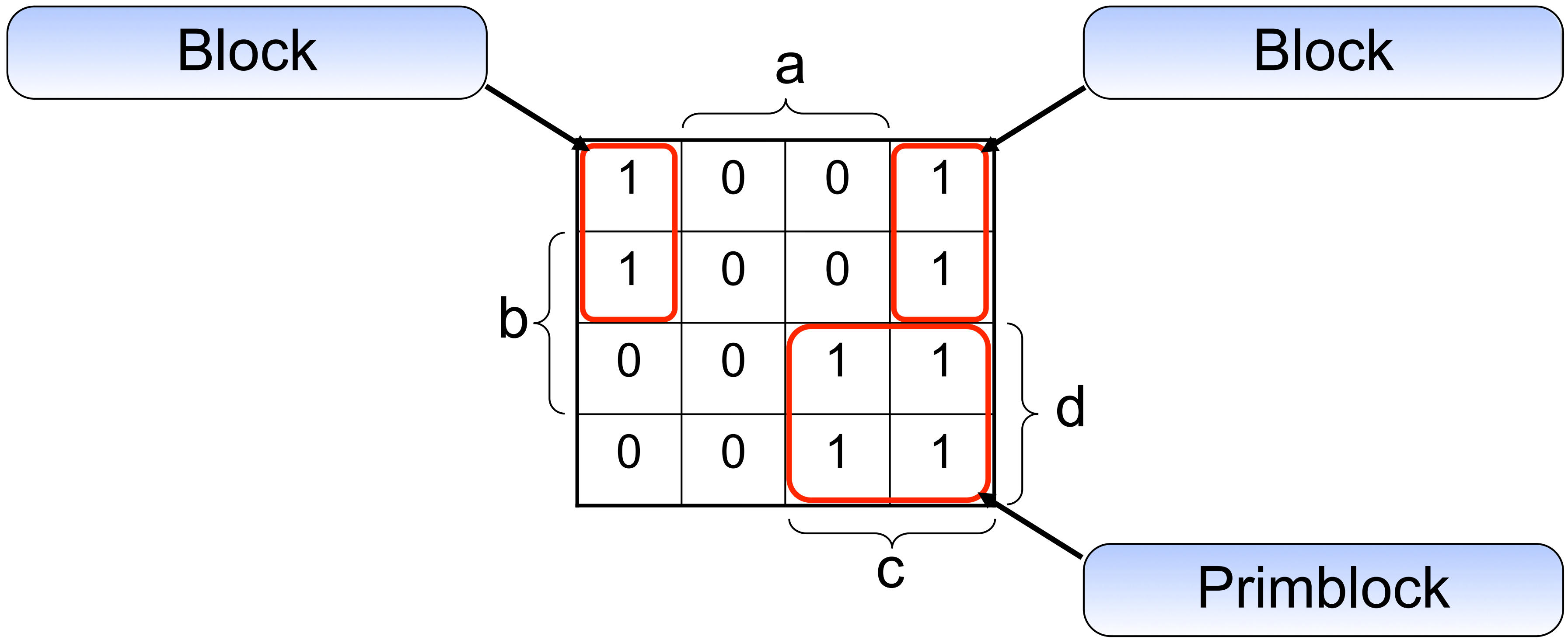


Übung 3

	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	-
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	-
15	1	1	1	1	1



Begriffe



Implikant | Implikant | Primimplikant

$$y = \neg a \neg c \neg d \vee \neg a c \neg d \vee cd$$

Minimalformen

Die hier vorgestellte Minimierung mit Hilfe von KV-Diagrammen berechnet eine disjunktive Minimalform der Eingangsfunktion.

Durch die Anwendung der Methode auf die Nullmenge kann in analoger Weise auch eine konjunktive Minimalform berechnet werden.

Disjunktive Minimalform

- Allgemeine disjunktive Form (DF)

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m(i)} L_{ij} \qquad L_{ij} \in \{ x_i, \neg x_i \}$$

- Disjunktive Minimalform (DMF)
  - liegt vor, wenn jede andere disjunktive Form gleich viele oder mehr Literale benötigt

Konjunktive Minimalform

- Allgemeine konjunktive Form (KF)

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m(i)} L_{ij} \qquad L_{ij} \in \{ x_i, \neg x_i \}$$

- Konjunktive Minimalform (KMF)
  - liegt vor, wenn jede andere konjunktive Form gleich viele oder mehr Literale benötigt

➲ Die DMF (KMF) ist nicht eindeutig, also keine Normalform

KV Diagramme: Zusammenfassung

1. Erstellen des KV-Diagramms

- Konstruktion durch abwechselndes horizontales und vertikales Spiegeln.
- Eintragen der Funktionswerte in das KV-Diagramm.

2. Bestimmen der Primblöcke

- Überdeckung der Einsmenge (DMF) bzw. der Nullmenge (KMF).
- Sukzessive Bildung von Blöcken mit 2, 4, 8 Belegungen, usw.
- Wenn die Blockbildung abbricht, sind alle Primblöcke gefunden.

3. Bestimmung einer vollständigen Überdeckung

- Ziel: Überdeckung mit der geringsten Anzahl an Primblöcken.
- Markierung aller Primblöcke, die <u>alleine</u> eine Funktionsstelle überdecken.
- Falls diese bereits alle Stellen überdecken, ist eine minimale Lösung erreicht.
- Reichen diese nicht zur Überdeckung aller Stellen aus, werden weitere Primblöcke hinzugenommen, bis eine vollständige Überdeckung erreicht ist.

4. Extraktion der disjunktiven (konjunktiven) Minimalform

- Jeder Primblock entspricht einem Primimplikanten.
- Alle Primimplikanten werden disjunktiv (konjunktiv) verknüpft.