Musterlösung

Webcode 2550

Seien $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und B ein Binärbaum mit mindestens 2^k Knoten. Dann existiert in B ein Pfad der Länge $\geq k$.

Beweis

- Induktionsanfang

  Besteht ein Binärbaum B aus einem einzigen Knoten, so ist die Abschätzung $1 \geq 2^k$ lediglich für $k = 0$ richtig. Jeder Baum besitzt dann trivialerweise einen Pfad der Länge $\geq k$.

- Induktionsvoraussetzung

  Für einen beliebigen Binärbaum B nehmen wir an, dass seine beiden Teilbäume B_1 und B_2 die Behauptung erfüllen.

- Induktionsschritt

  Wir kombinieren B_1 und B_2 zu einem Binärbaum B und zeigen, dass auch B die postulierte Eigenschaft erfüllt. Für die Anzahl der Knoten von B gilt:

  $$|B| = |B_1| + |B_2| + 1 \tag{1}$$

  O. B. d. A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass B_1 mindestens so viele Knoten enthält wie B_2. Dann können wir (1) folgendermaßen umschreiben:

  $$|B| \leq 2 \cdot |B_1| + 1 \tag{2}$$

  Ist k_1 die Länge des längsten Pfades in B_1, so erfüllt B_1 nach der Induktionsvoraussetzung die Beziehung $|B_1| < 2^{k_1+1}$, die wir auch wie folgt notieren können:

  $$|B_1| \leq 2^{k_1+1} - 1 \tag{3}$$

  Mit dieser Abschätzung können wir (2) umformen, in:

  $$|B| \leq 2\left(2^{k_1+1} - 1\right) + 1 = 2^{k_1+2} - 1$$

  Dies ist wiederum dasselbe wie:

  $$2^{k_1+2} > |B| \tag{4}$$

  Sei nun $|B| \geq 2^k$, wie es in der Voraussetzung des Satzes gefordert ist. Aus (4) folgt dann:

  $$2^{k_1+2} > 2^k \tag{5}$$

Hieraus folgt $k_1 + 2 > k$, was das gleiche ist wie:

$$k_1 + 1 \geq k \tag{6}$$

Da in B_1 ein Pfad der Länge k_1 existiert, gibt es in B einen Pfad der Länge $k_1 + 1$. Dieser ist nach (6) ein Pfad der Länge $\geq k$, was zu beweisen war.

□